Практическое занятие: «Решение иррациональных уравнений, неравенств. Метод интервалов. Степени».

Цель работы:

Повторить для подготовки к экзамену следующие темы:

1. определение степени с рациональным показателем, корень n- ой степени и их свойства;
2. решение неравенств методом интервалов;
3. методы решения иррациональных уравнений и неравенств.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы
2. Используя указания к практической работе, решить задания своего варианта.
3. Оформить решение.

Указания к выполнению работы

Степени с рациональным показателем

№ 1. Вычислить:

$$\left(\mathbf{7\frac{1}{9}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{\frac{1}{8}}\right)^{-1} + \mathbf{0,343^{\frac{2}{3}} \cdot 0,1^{-2}}$$

Решение:

Используем следующие формулы: $\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

$$\left(7\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{64}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{1}\right)^{1} = 8$$

$$0,343^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{343}{1000}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{343}{1000}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{343}{1000}}\right)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

$$0,1^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{1}\right)^2 = 100$$

Получили следующее арифметическое выражение:

$$\frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{49}{100} \cdot 100 = 3 + 49 = 52$$

Ответ: 52.

Метод интервалов

№ 2. Решить неравенство:

$$\mathbf{\frac{2}{x} - \frac{9}{x^2 + 3x} + \frac{x}{x + 3} \leq 0}$$

Решение:

Приведём сначала неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов. Для этого в знаменателе второй дроби вынесем x за скобки:

$$\frac{2}{x} - \frac{9}{x(x + 3)} + \frac{x}{x + 3} \leq 0$$

Приведем к общему знаменателю заданные дроби:

$$\frac{2(x+3)-9+x\cdot x}{x(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{2x+6-9+x^2}{x(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x(x+3)} \leq 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x(x+3)}$

Найдем нули и точки разрыва этой функции:

Нули:

$$x^2+2x-3=0$$

$$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16 =$$

$$= 4^2$$

$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$

Точки разрыва:

$$x(x+3)=0$$

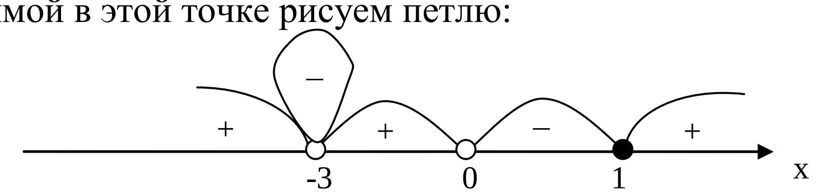
$$x = 0 \text{ или } (x+3)=0$$

$$x=-3$$

Нанесём найденные точки на числовую прямую в порядке возрастания (точки разрыва функции на прямой «выколоты»). Функцию разложим на линейные множители:

$$f(x) = (x-1)(x+3)x(x+3) = x(x-1)(x+3)^2$$

Точка x=-3 двойная (один из множителей в разложении в <u>четной</u> степени), поэтому на прямой в этой точке рисуем петлю:



Для определения знака на одном из интервалов, возьмем любую «удобную» точку, например x=2 и подставим это число вместо x в выражение $f(x)$:

$2(2-1)(2+3)^2 = 2\cdot 1\cdot 25 > 0$. Ставим в крайнем интервале знак «+», затем чередуем знаки, проходя через петлю.

Выберем на числовой прямой те промежутки, знак которых совпадает со знаком неравенства. Это промежуток $x \in (0;1]$, который и является решением заданного неравенства.

Ответ: $x \in (0; 1]$**.**

Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения – это уравнения, которые содержат переменную под знаком корня.

Главный способ избавиться от корня и получить рациональное уравнение – это возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

I. Простейшее иррациональное уравнение – это уравнение вида $\sqrt{\boldsymbol{A(x)}} = \boldsymbol{B(x)}$, где A(x) и B(x) – это выражения, зависящие от переменной x.

$$\boxed{\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0, \\ \left(\sqrt{A(x)}\right)^2 = \left(B(x)\right)^2 \end{cases}} \qquad \textbf{(1)}$$

Неравенство $B(x) \geq 0$ в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в квадрат, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

<u>Пример1.</u> Решить уравнение

$$\boldsymbol{2\sqrt{x-2} = 17 - x}$$

Приведем уравнение к виду (1), для этого перенесем число 9 в правую часть уравнения

$$2\sqrt{x-2} = 17 - x$$

Составим систему:

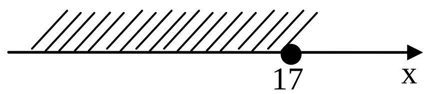
$$\begin{cases} 17 - x \geq 0 \\ \left(2\sqrt{x-2}\right)^2 = (17 - x)^2 \end{cases}$$

1) Решим линейное неравенство: $17 - x \geq 0$

$$-x \geq -17$$

$$x \leq 17$$

$x \in (-\infty; 17]$



2) Решим уравнение $\left(2\sqrt{x-2}\right)^2 = (17-x)^2$.

Для этого воспользуемся формулами $\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{a}$ (для левой части уравнения) и $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{2}}$ (для правой части уравнения). Получим следующее равносильное уравнение:

$$4 \cdot (x-2) = 17^2 - 2 \cdot 17 \cdot x + x^2$$

$$4x - 8 = x^2 - 34x + 289$$

Перенесем слагаемые в одну часть (в нашем случае перенесем слагаемые в правую часть уравнения) и получим квадратное уравнение:

$$x^2 - 34x + 289 - 4x + 8 = 0$$

$$x^2 - 38x + 297 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c = 19^2 - 1 \cdot 297 = 361 - 297 = 64 = 8^2$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

$$x_1 = 19 + 8 = 27$$

$$x_2 = 19 - 8 = 11$$

Итак, при решении системы получили: $\begin{cases} x_1 = 27 \\ x_2 = 11 \\ x \in (-\infty; 17] \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 11.$

Ответ. 11.

II. Если иррациональное уравнение имеет вид $\sqrt{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})} + \sqrt{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{C}$, то его необходимо будет возводить в квадрат два раза. Для того, чтобы отсечь посторонние корни перед каждым возведением в квадрат необходимо к ОДЗ добавлять условия.

Условия записываются из утверждений, которые следуют из определения арифметического квадратного корня: 1) $\sqrt{a}$ имеет смысл (вычисляется), если $a \geq 0$; 2) при извлечении корня $\sqrt{a} = b$ получаем неотрицательное число $b \geq 0$.

III. Если иррациональное уравнение имеет вид: $\sqrt{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})} - \sqrt{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{C}$, где A(x) и B(x) – выражения, зависящие от переменной x, то сначала отрицательные слагаемые переносят в противоположные части уравнения (получают сумму неотрицательных слагаемых):

$$\sqrt{\boldsymbol{A(x)}} = \boldsymbol{C} + \sqrt{\boldsymbol{B(x)}}$$

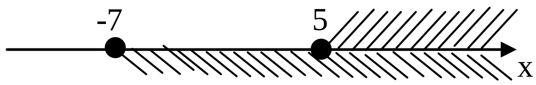
А затем уравнение решают так же как и в случае (II)

<u>Пример 2.</u> Решить уравнение $\boldsymbol{\sqrt{x+7} + 2\sqrt{x-5} = 8}$

1) Составим ОДЗ:

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq 5 \end{cases}$$



$$x \in [5; +\infty)$$

2) Возведем левую и правую часть уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x+7} + 2\sqrt{x-5}\right)^2 = 8^2$$

Для левой части уравнения применим формулу $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$$\left(\sqrt{x+7}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x+7} \cdot 2\sqrt{x-5} + \left(2\sqrt{x-5}\right)^2 = 64$$

$$x + 7 + 4 \cdot \sqrt{(x+7)\cdot(x-5)} + 4(x-5) = 64$$

Раскроем скобки:

$$x + 7 + 4 \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 7x - 35} + 4x - 20 = 64$$

$$4 \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 7x - 35} = 64 - x - 7 - 4x + 20$$

$$4 \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 35} = 77 - 5x$$

Получили уравнение (**I**) вида. Добавляем к ОДЗ условие, при котором данное уравнение можно возводить в квадрат $77 - 5x \geq 0$

3)

$$77 - 5x \geq 0$$

$$-5x \geq -77$$

$$x \leq \frac{77}{5} = 15\frac{2}{5}$$

$$x \in (-\infty; 15{,}4]$$

Значит корень должен быть из интервалов:

$$\begin{cases} x \in [5; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; 15\frac{2}{5}\right] \end{cases}$$

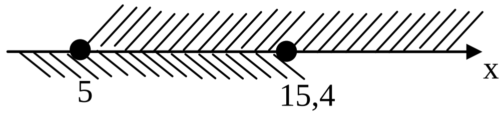
4) Возведем левую и правую часть уравнения в квадрат:

$$\left(4 \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 35}\right)^2 = (77 - 5x)^2$$

$$16 \cdot (x^2 + 2x - 35) = 77^2 - 2 \cdot 77 \cdot 5x + (5x)^2$$

$$16x^2 + 32x - 560 = 5929 - 770x + 25x^2$$

Перенесем слагаемые в правую часть уравнения и приведем подобные:



$$x \in \left[5; 15\tfrac{2}{5}\right]$$

$$5929 - 770x + 25x^2 - 16x^2 - 32x + 560 = 0$$

$$9x^2 - 802x + 6489 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c$$

$$\frac{D}{4} = 401^2 - 9 \cdot 6489 = 160801 - 58401$$

$$= 102400 = 320^2$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

$$x_1 = \frac{401 - 320}{9} = 9$$

$$x_2 = \frac{401 + 320}{9} = \frac{721}{9} = 80\frac{1}{9}$$

Итак, при решении уравнения получили:

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 80\tfrac{1}{9} \\ x \in \left[5; 15\tfrac{2}{5}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

Ответ. 9.

IV. Метод замены переменной.

Пример 3. $\sqrt[4]{x^2 - 15x} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^2 - 15x}} = 1$

Решение: 1) Делаем замену $\sqrt[4]{x^2 - 15x} = t,\ t > 0$

2) Решаем уравнение

$$t - \frac{2}{t} = 1$$

Для этого умножим левую и правую часть уравнения на t:

$$t^2 - 2 = t$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1; \qquad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Подходит $t_2 = 2 > 0$

3) Решите уравнение $\sqrt[4]{x^2 - 15x} = 2$. Для этого возводим обе части уравнения в 4-ую степень:

$$x^2 - 15x = 16$$

$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 225 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289 = 17^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{15 - 17}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{15 + 17}{2} = 16$$

Ответ: -1 и 16.

Иррациональные неравенства

Пример. Решить неравенство:

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} > x + 4$$

Имеем иррациональное неравенство вида (5) из таблицы «Решение иррациональных неравенств». Для его решения необходимо составить совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 4 < 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ \left(\sqrt{(x+2)(x-5)}\right)^2 > (x+4)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

1. Решим первую систему неравенств: $\begin{cases} x + 4 < 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \end{cases}$

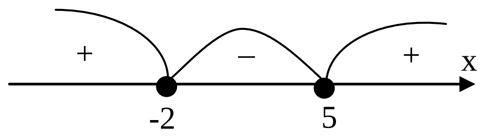
   a. $x + 4 < 0; \qquad x < -4; \qquad x \in (-\infty; -4)$

b. $(x+2)(x-5) \geq 0$;

<u>Нули:</u> $(x+2)(x-5) = 0$

$x = -2$ или $x = 5$

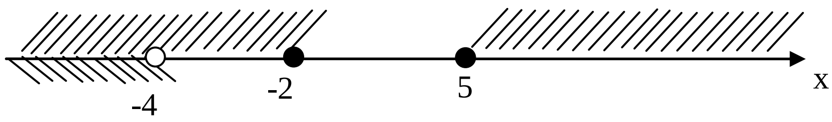
Нанесем нули на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$$x \in (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$$

c. Теперь определим общее решение системы $\begin{cases} x \in (-\infty; -4) \\ x \in (-\infty; -2] \cup [5; +\infty) \end{cases}$

Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Значит $x \in (-\infty; -4)$

2. Решим вторую систему неравенств: $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ \left(\sqrt{(x+2)(x-5)}\right)^2 > (x+4)^2 \end{cases}$

a. $x + 4 \geq 0$; $\quad x \geq -4$; $\quad x \in [-4; +\infty)$

b. $\left(\sqrt{(x+2)(x-5)}\right)^2 > (x+4)^2$;

$x^2 - 5x + 2x - 10 > x^2 + 8x + 16$

$x^2 - 5x + 2x - 10 - x^2 - 8x - 16 > 0$

$-11x - 26 > 0$

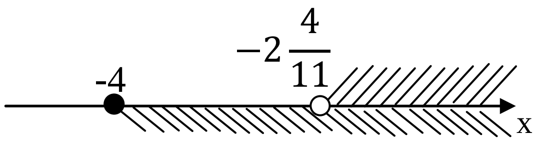
$-11x < 26$

$x > -\dfrac{26}{11} = -2\dfrac{4}{11}$

$x \in \left(-2\frac{4}{11}; +\infty\right)$

c. Теперь определим общее решение системы $\begin{cases} x \in [-4; +\infty) \\ x \in \left(-2\frac{4}{11}; +\infty\right) \end{cases}$

Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Значит $x \in \left(-2\frac{4}{11}; +\infty\right)$

Решением совокупности двух систем является объединение решений этих систем

$x \in (-\infty; -4) \cup \left(-2\frac{4}{11}; +\infty\right)$

Ответ. $x \in (-\infty; -4) \cup \left(-2\frac{4}{11}; +\infty\right)$

Контрольные вопросы:

1) Что такое степень с натуральным показателем? Целым? Рациональным? Перечислите основные свойства степеней
2) дать определение арифметического квадратного корня; какие утверждения следуют из определения арифметического квадратного корня?
3) какой основной метод решения иррациональных уравнений?
4) назовите основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств
5) что такое ОДЗ?
6) Как решаются неравенства методом интервалов? Когда знаки на интервалах чередуются? А когда нет? (сформулируйте правило чередования знаков)
7) Назовите основные виды иррациональных неравенств?