Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Молодечненский государственный политехнический колледж»

Практическая работа: «Прямые и плоскости в пространстве».

Преподаватель И. А. Кочеткова, Ж.И. Тимошко

Цель работы:

1. Отработать навыки решения задач, связанных с основными понятиями и теоремами стереометрии.
2. Развить математическое мышление, наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

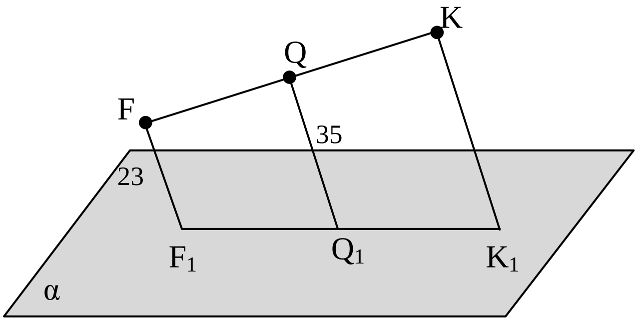
1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) какая прямая называется параллельной (перпендикулярной) плоскости?
   б) что такое перпендикуляр? Наклонная? Проекция наклонной?
   в) сформулируйте теорему о трех перпендикулярах
   г) что такое угол между прямой и плоскостью?
   д) какие плоскости называются взаимно перпендикулярными?
   ж) когда прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей будет перпендикулярна другой плоскости?

2. Используя указания к практической работе, решить задачи.

3. Оформить решение.

Указания к выполнению практической работы



№ 1. Через концы отрезка FK и его середину Q проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках F_1, Q_1, K_1. Найти длину отрезка KK_1, если отрезок FK не пересекает плоскость α и $FF_1=23$, $QQ_1=35$.

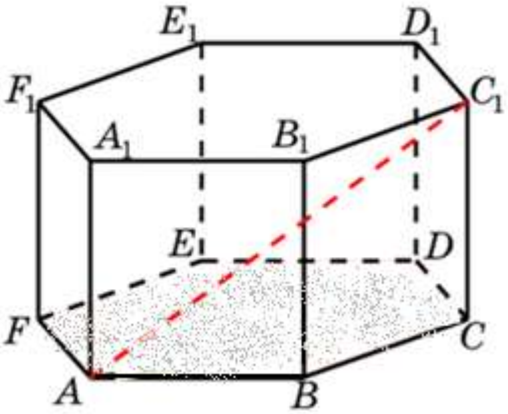
Решение.

Так как прямые FF_1, QQ_1, KK_1 параллельны и пересекают одну и ту же прямую FK, то все они находятся в одной плоскости. Обозначим ее β. Тогда $\alpha \cap \beta = F_1K_1$. Фигура FKK_1F_1 – трапеция с основаниями FF_1 и KK_1. Поэтому QQ_1 – средняя линия трапеции.

$QQ_1 = \frac{FF_1+KK_1}{2}$; $35 = \frac{23+KK_1}{2}$; $70 = 23 + KK_1$; $KK_1 = 70 - 23 = 47$

Ответ. 47

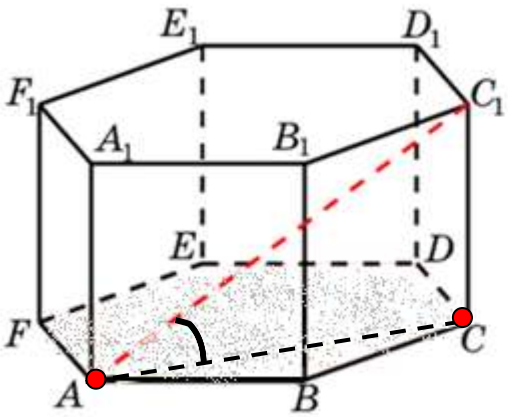
№ 2. В правильной шестиугольной призме *ABCDEF…F₁* постройте угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.



Найти: $\angle(AC_1; ABC)$

Решение.

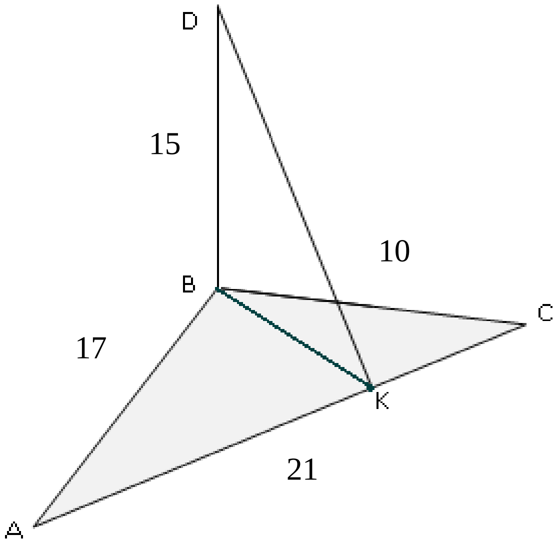
Опр. ***Углом между прямой и плоскостью***, пересекающей эту плоскость (причём прямая не перпендикулярна плоскости), называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.



1) AC_1 – наклонная к плоскости (ABC)
   $A \in (ABC)$
   $C_1 \notin (ABC)$
2) C_1C – перпендикуляр к плоскости (ABC)
3) A – основание наклонной
   C – основание перпендикуляра
   AC – проекция наклонной AC_1
4) $\angle(AC_1; ABC) = \angle C_1AC$ – искомый угол.

Ответ. $\angle C_1AC$.

№ 3. Стороны треугольника ABC равны 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего ∠B треугольника проведен к его плоскости перпендикуляр BD, равный 15 см. Найти расстояние от точки D до большей стороны треугольника.



Решение.

1. DK – расстояние от точки D до стороны AC, поэтому DK⊥AC. По теореме о трех перпендикулярах: если наклонная перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и её проекция так же перпендикулярна этой прямой. То есть DK⊥AC ⇒ BK⊥AC.
2. Если BK⊥AC, то BK – высота ΔABC. А значит её можно найти по формуле:

$$h = \frac{2S_{\Delta}}{AC}$$

3. Площадь ΔABC найдем по формуле Герона:

$$p = \frac{17 + 10 + 21}{2} = 24$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot (24-17) \cdot (24-10) \cdot (24-21)} =$$

$$= \sqrt{24 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 3} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{16} = 21 \cdot 4 = 84$$

4. $BK = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$
5. Так как BD⊥(ABC), то отрезок BD перпендикулярен любой прямой в плоскости треугольника и проходящей через точку B. Следовательно, BD⊥BK и ΔDBK - прямоугольный. DK – гипотенуза, найдем её по теореме Пифагора:

$$DK^2 = BD^2 + BK^2$$

$$DK = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

Ответ. 17

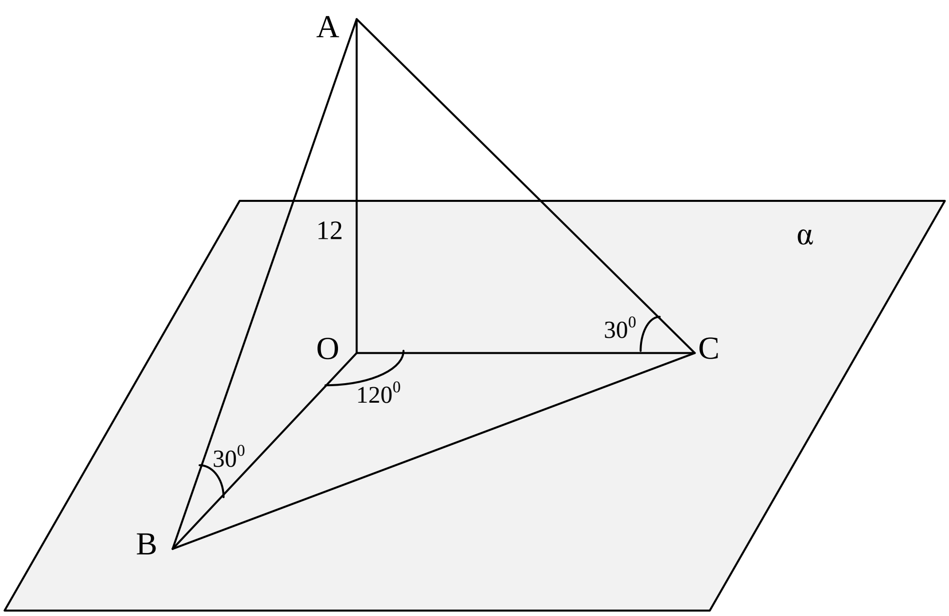
№ 4. Из точки A, находящейся вне плоскости α, проведены перпендикуляр AO=12 и две наклонные, образующие с плоскостью углы 30^0, а угол между их проекциями 120^0. Найти расстояние между основаниями наклонных.

Решение.

- **Заметим**, что отрезок BC можно найти из двух треугольников: ΔABC и ΔBOC. Его нахождение зависит от того задан ли угол между наклонными или между их проекциями.

В данной задаче задан угол между проекциями наклонных ∠BOC=120.

- При решении данной задачи используйте определения тригонометрических функций, теорему косину-



сов и теорему Пифагора.

1. Рассмотрим ΔАОС – прямоугольный, т. к. АО $\perp$ α

$$ctg30^0 = \frac{OC}{AO}$$

$$OC = AO \cdot ctg30^0$$

$$OC = 12\sqrt{3}$$

2. ΔАОС=ΔАОВ (по острому углу и катету: ∠АВО=∠АСО=30^0; катет АО - общий). Значит ВО=ОС=$12\sqrt{3}$

3. Рассмотрим Δ ВОС и применим теорему косинусов для нахождения его третьей стороны ВС:

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2 \cdot BO \cdot CO \cdot cos120^0$$

Так как $cos120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$, то получим:

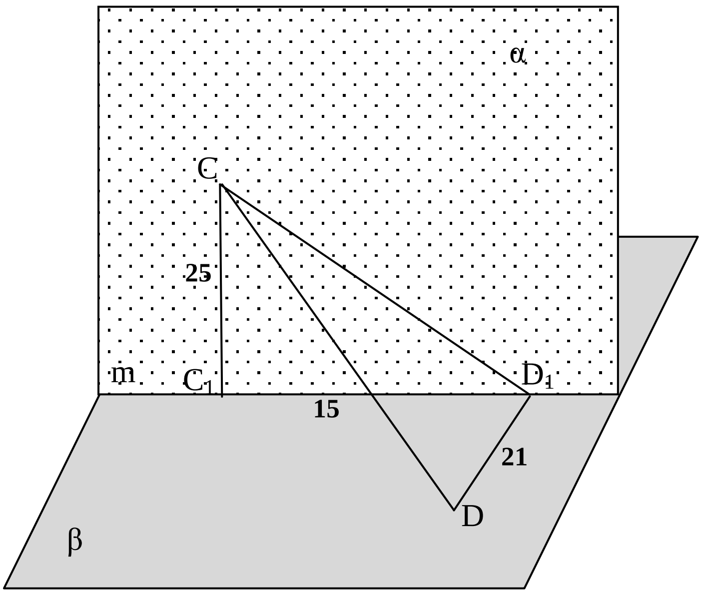
$$BC^2 = \left(12\sqrt{3}\right)^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 12\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 432 + 432 + 432 = 1296$$

$$BC = \sqrt{1296} = 36$$

Ответ. 36

№5. Из точек С и D, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры CC_1 и DD_1 на прямую пересечения плоскостей m. Найти длину отрезка CD, если CC_1=25, DD_1=21, C_1D_1=15.

Решение.



1) ΔCC_1D_1 – прямоугольный, так как $CC_1 \perp$ m. Тогда CD_1 – гипотенуза

$$CD_1 = \sqrt{CC_1^2 + C_1D_1^2} = \sqrt{25^2 + 15^2} = \sqrt{850}$$

2) Рассмотрим Δ DD_1C. Докажем, что этот Δ-к прямоугольный.

Имеем, что $\left.\begin{matrix} \beta \perp \alpha \\ DD_1 \in \beta \\ DD_1 \perp m \end{matrix}\right\} \Rightarrow DD_1 \perp \alpha$

Так как $DD_1 \perp \alpha$, то $DD_1 \perp$ любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку D_1. Значит $DD_1 \perp CD_1$. Следовательно Δ DD_1C прямоугольный.

∠ DD_1C=90^0, значит CD – гипотенуза.

$$CD = \sqrt{CD_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{\sqrt{850}^2 + 21^2} = \sqrt{850 + 441} = \sqrt{1291}$$

Ответ. $\sqrt{1291}$.