Молодечненский государственный политехнический колледж

Практическая работа: Решение задач по теме "Геометрический смысл производной. Механический смысл первой и второй производной"

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать навыки решения задач, связанных с механическим смыслом первой и второй производной.
2) Научиться составлять уравнение касательной, находить её угловой коэффициент и угол наклона касательной к оси Ох; угол между двумя прямыми
3) Развить математическое мышление, закрепить навыки работы с таблицей производных, умения вычислить производную.
4) Повторить формулы вычисления площади прямоугольного треугольника и его элементов.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий и решить их.
4. Оформить отчёт.

- Механический смысл производной:

Производная функции в данной точке равна скорости в данный момент времени: $s'(t) = v(t)$.

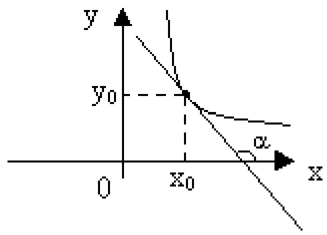
- Производной второго порядка функции f(x) называют производную от первой производной функции f(x), т. е.

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

- Вторая производная функции равна ускорению в данный момент времени t:
  $a = v'(t) = s''(t)$

- Геометрический смысл производной:

Если существует производная функции y=f(x) в точке x_0, то она равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к кривой в точке x_0: $\boxed{y'(x_0) = k_{кас.}}$



Замечание: угловой коэффициент прямой (в том числе и касательной) равен тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox: **k = tgα.**

- Уравнение касательной

Прямая, для которой известны угловой коэффициент k и точка с координатами (x_0; y_0) имеет уравнение: $\boxed{y - y_0 = k \cdot (x - x_0)}$

Для составления уравнения касательной нужно знать: a) координаты точки касания x_0, $y_0=f(x_0)$ и b) значение производной функции в точке x_0, т. е. угловой коэффициент касательной $k_{кас.} = y'(x_0)$.

- Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны $k_1 = k_2$.

Если прямые перпендикулярны, то $k_1 = -\,{}^{1}\!/_{k_2}$

- Угол между 2-мя прямыми находится по формуле: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

- Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента

$$dy = y' \cdot dx,$$

где дифференциал аргумента dx принимают равным приращению аргумента Δx, т. е. $dx = \Delta x$

- Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.
   a) нахождение приращения функции: $\Delta y \approx dy$.
   b) Нахождение числового значения функции: $y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy$

Контрольные вопросы:

1) Как вычислить скорость и ускорение тела в любой момент времени?
2) Какая прямая называется касательной? Как можно найти угловой коэффициент касательной?
3) Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых?
4) Как вычислить угол между прямыми?
5) Запишите уравнение касательной и расскажите, что необходимо знать для его написания?
6) Как найти площадь прямоугольного треугольника? Чему равен радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника?
7) Что такое дифференциал функции?
8) Расскажите о применении дифференциала к приближённым вычислениям.

Указания к выполнению практической работы

Пример 1.

Тело движется по прямой линии по закону $S = \frac{1}{3} \cdot t^3 + 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение тела в момент t_1=2.

Решение.

$\boxed{s'(t) = v(t)}$ **- механический смысл производной 1-го порядка.**

$v(t) = s'(t) = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 + 2 \cdot 2t + 3 \cdot 1 = t^2 + 4t + 3$ - скорость тела в любой момент времени t. Найдём скорость тела в момент времени t_1=2: $v(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = 15$ (м/с).

$\boxed{a = v'(t) = s''(t)}$ **- механический смысл производной 2-го порядка**

$a = v'(t) = 2t + 4$ - ускорение тела в любой момент времени t. Найдём скорость тела в момент времени t_1=2: $a(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$ (м/с^2).

Ответ. 15 м/с; 8 м/с^2

Пример 2.

Найти в какой момент времени t скорость тела, двигающегося по закону $s = t^3 - 2t^2$, будет равна нулю.

Решение.

Определим скорость тела в любой момент времени t: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 2 \cdot 2t = 3t^2 - 4t$. По условию задачи нужно найти t, когда скорость v=0. Значит $3t^2 - 4t = 0$. Решим это уравнение:

$3t^2 - 4t = 0$;

$t \cdot (3t - 4) = 0$;

t=0 или 3t-4=0;

3t=4;

$t = \frac{4}{3}$

Ответ. 0 или 4/3.

Пример 3. Одно тело движется по закону $s_1 = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2$, другое – по закону $s_2 = \frac{1}{2}t^2 - 10t$.

Определить ускорения тел в моменты времени t, когда скорости их равны.

Решение.

По условию задачи скорости тел равны, т. е. $v_1 = v_2$. Поэтому сначала определим v_1 и v_2:

$v_1 = (s_1)' = \left(\frac{1}{3}t^3 - 5t^2\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 - 10t = t^2 - 10t$ и

$v_2 = (s_2)' = \left(\frac{1}{2}t^2 - 10t\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2t^2 - 10 = t^2 - 10.$

Теперь решим уравнение: $t^2 - 10t = t - 10$;

$t^2 - 10t - t + 10 = 0$;

$t^2 - 11t + 10 = 0$;

t_1=1 или t_2=10.

Определим ускорения тел в данные моменты времени:

$$a_1 = (v_1)' = 2t - 10 \Longrightarrow a_1(1) = -9; \quad a_1(10) = 10$$
$$a_2 = (v_2)' = 1 \Longrightarrow a_2(1) = a_2(10) = 1$$

Ответ. $a_1(1) = -9$; $a_1(10) = 10$; $a_2(1) = a_2(10) = 1$

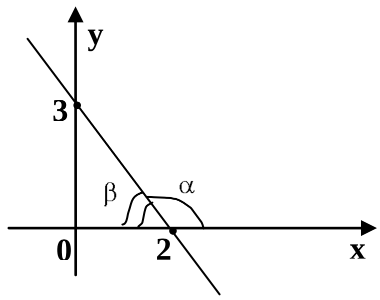
Пример 4.

Составить уравнение прямой y=kx+b. (См. рисунок)

1 способ.

а) $\boxed{\mathbf{k = tg\,\alpha}}$ = tg (180^0-β) = - tgβ,

(α, β - смежные углы). Из прямоугольного треугольника, который образует прямая с осями координат найдём tgβ. (Тангенс угла – это отношение противолежащего катета к прилежащему катету) $k = -\mathrm{tg}\beta = -\frac{|3|}{|2|} = -\frac{3}{2}$.



b) Коэффициент b прямой показывает в какой точке прямая пересекает ось Ox, значит b=3.

Итак, уравнение прямой $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

2 способ.

Прямая проходит через точки с координатами (0;3) и (2;0). Можно составить систему уравнений $\begin{cases} 3 = k\cdot 0 + b \\ 0 = 2\cdot k + b \end{cases}$ и решить её. Получим $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Ответ. $y = -\frac{3}{2}x + 3$

Пример 5.

Составить уравнения касательной и нормали, проведённых к кривой $y = \sqrt{x}\cdot \ln x$ в точке с абсциссой, равной 1.

Решение.

$\boxed{y - y_0 = k\cdot(x - x_0)}$ **- уравнение касательной.**

a) x_0=1, $y_0 = y(1) = \sqrt{1}\cdot\ln 1 = 1\cdot 0 = 0$. Точка касания имеет координаты (1;0)

b) **угловой коэффициент касательной** $\boxed{k_{кас.} = y'(x_0)}$. Найдём производную:

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)'\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

Тогда $k_{кас.} = y'(1) = \frac{\ln 1 + 2}{2\sqrt{1}} = 1$.

c) Подставим найденные элементы x_0; y_0; k в уравнение касательной и получим: $y - 0 = 1\cdot(x - 1)$; $y = x - 1$.

d) Нормаль – это прямая, которая проходит через точку касания перпендикулярно касательной, поэтому $k_н = -1/k_{кас} = -1$ (условие перпендикулярности двух прямых). Уравнение нормали примет вид: $y - 0 = -1\cdot(x - 1)$; $y = -x + 1$.

Ответ. y=x-1; y=-x+1.

Пример 6.

Найти площадь треугольника, который образует касательная с осями координат, если известно, что касательная проведена к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ в точке x_0=4.

Решение.

a) Составим уравнение касательной $y - y_0 = k\cdot(x - x_0)$:

$x_0=4$; $y_0 = 4^2 - 6\cdot 4 + 5 = 16 - 24 + 5 = -3$;

$y' = 2x - 6 \quad \Rightarrow k_{кас.} = y'(4) = 8 - 6 = 2$;

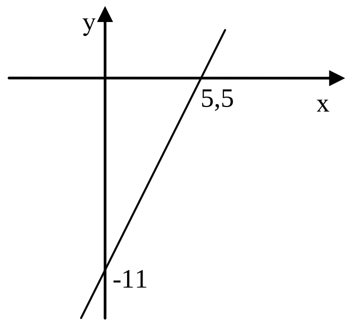
y+3=2(x-4); y=2x-8-3; y=2x-11

b) Найдём точки пересечения касательной с осями координат:

Ox: y=0; 2x-11=0;

$2x=11; \quad x = \frac{11}{2} = 5{,}5$

Oy: x=0; y=-11.



c) Найдём площадь треугольника, который образует касательная с осями координат:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{11}{2}\right|\cdot|-11| = \frac{121}{4}$$

Ответ. 121/4.

Пример 7.

В какой точке касательная к кривой y=lnx наклонена к оси Ox под углом 45^0?

Решение.

Угловой коэффициент прямой (в том числе и касательной) равен тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox: $\boxed{k = tg\alpha} \Rightarrow k_{кас} = tg\, 45^0 = 1$.

С другой стороны $\boxed{k_{кас.} = y'(x_0)}$. Получаем, что

$$y'(x_0) = 1 \quad (*).$$

Найдём x_0, для этого сначала найдём производную функции $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Теперь уравнение (*) примет вид $\frac{1}{x_0} = 1$; $x_0=1$; $y_0=\ln 1=0$.

Итак, точка касания имеет координаты (1;0).

Ответ. (1;0).

Пример 8.

Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$, проходящей параллельно прямой y= - 2x + 8.

Решение.

Из условия параллельности двух прямых **их угловые коэффициенты равны** $k_1 = k_2$. Значит $k_{кас} = -2$.

С другой стороны $\boxed{k_{кас.} = y'(x_0)}$. Получаем, что $y'(x_0) = -2$. Найдём x_0:

$y' = (x^2 - 6x + 2)' = 2x - 6$. Значит $2\cdot x_0 - 6 = -2$; $2\cdot x_0 = 4$; $x_0 = 2$.

$x_0 = 2$; $y_0 = 2^2 - 6\cdot 2 + 2 = 4 - 12 + 2 = -6$. Точка касания имеет координаты (2; - 6).

Составим уравнение касательной: $y + 6 = -2\cdot(x - 2)$; $y = -2x - 2$.

Ответ. y= –2 x – 2.

<u>Пример 9.</u>

Найти угол между параболами $y = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}$ и $y = \frac{3}{2}x^2$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.

Решение.

Если в точке пересечения парабол провести к ним касательные прямые, то угол между этими касательными и будет углом между параболами.

Известно, что <u>угол</u> <u>между</u> <u>2-мя</u> <u>прямыми</u> находится по формуле: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. В нашем примере, k_1 и k_2 – угловые коэффициенты касательных прямых.

$k_1 = y_1'(x_0)$ и $k_2 = y_2'(x_0)$.

a) Найдём точку пересечения парабол, для этого решим систему: $\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$

$\frac{3}{2}x^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}$; $6x^2 = x^2 + 5$; $5x^2 = 5$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$.

По условию $x_0 = 1$

b) Найдём угловые коэффициенты касательных:

$$y_1' = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 2x + 0 = \frac{1}{2}x \Rightarrow k_1 = y_1'(1) = \frac{1}{2};$$

$$y_2' = \left(\frac{3}{2}x^2\right)' = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x \Rightarrow k_2 = y_2'(1) = 3.$$

c) Найдём угол между касательными по формуле $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$:

$$tg\varphi = \frac{3 - 0,5}{1 + 3 \cdot 0,5} = \frac{2,5}{1 + 1,5} = 1 \Rightarrow \varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. 45^0.

<u>Пример 10.</u>

Вычислить приближенное значение функции tg 44^0.

Решение.

Используем формулу $y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy$.

В нашем случае y=tg x; $x + \Delta x = 45^0 - 1^0 \Rightarrow x = 45^0 = \frac{\pi}{4}$; $\Delta x = -1^0 = -\frac{\pi}{180} = -0,017$.

Тогда $tg\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) \approx tg\left(\frac{\pi}{4}\right) + dy$.

a) $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

b) $dy = y' \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta x$, значит $\Delta y = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} \cdot (-0,017) = -\frac{0,017}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -0,034;$

c) $\operatorname{tg} 44^0 \approx 1 - 0{,}034 = 0{,}966$.

Ответ. 0,966