Молодечненский государственный политехнический колледж

Инструкция к практическому занятию:

Построение графиков функций.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать навыки построения графиков функций.
2) Развить способность анализировать свойства функций, их геометрическую интерпретацию.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий и провести исследование функции, построить графики.
4. Оформить отчёт.

Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Найти $y'(x)$ и критические точки (точки x=a, в которых $y'(a)=0$ или $y'(a)$ не существует).
2. Производную разложить на множители.
3. Критические точки нанести на числовой прямой в порядке возрастания.
4. Определить знаки производной на каждом интервале. Если $y'(x)>0$, то функция на данном интервале возрастает. Если $y'(x)<0$, то функция на данном интервале убывает.
5. Если **x=a** $\in$ D(y) и производная при переходе аргумента через точку x=a меняет свой знак с «+» на «–», то эта точка максимума. Если **x=a** $\in$ D(y) и производная при переходе аргумента через точку x=a меняет свой знак с «-» на «+», то эта точка минимума.
6. Определить ординаты точек экстремума и нанести на координатную плоскость.

Правило нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба:

1. Найти $y''(x)$ и критические точки (точки x=a, в которых $y''(a)=0$ или $y''(a)$ не существует).
2. Вторую производную разложить на множители.
3. Критические точки нанести на числовой прямой в порядке возрастания.
4. Определить знаки второй производной на каждом интервале и сделать выводы: а) Если вторая производная функции y=f(x) на данном промежутке положительна, то кривая вогнута на этом промежутке, а если отрицательна ,- то выпукла.

$f''(x)>0$ кривая вогнута 

$f''(x)<0$ кривая выпукла 

б) если при переходе через данную точку $f''(x)$ меняет свой знак, то это точка перегиба.

5. Определить ординату точки перегиба и нанести на координатную плоскость.

Указания к выполнению практической работы

Пример 1. Исследовать функцию $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ на монотонность, точки экстремума, выпуклость и точки перегиба. Построить график.

1. Область определения D(y)=R.
2. Определим промежутки монотонности и экстремумы функции:

   Найдём критические точки (точки, в которой производная равна нулю или не существует)

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1;\ x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2};\ x_1=1;\ x_2=2$$

Нанесём точки на числовую прямую и определим знаки производной на каждом интервале

$$y' = 6\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$

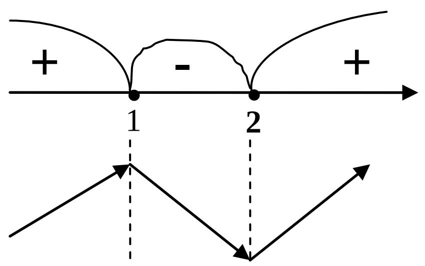


Рис.1

Получили схему поведения функции (рис.1), из которой видно, что функция возрастает на промежутках $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ и убывает на промежутке $x \in (1; 2)$

Функция имеет точки экстремума:

Т. к. производная, проходя через точку x=1, меняет свой знак с «+» на «-», то x=1 – абсцисса точки максимума. Найдём её ординату y(1)=2-9+12+1=6.

(1;6) – точка максимума

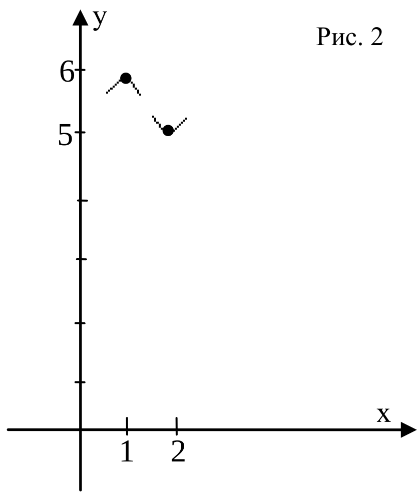


Рис. 2

Т. к. производная, проходя через точку x=2, меняет свой знак с «-» на «+», то x=2 – абсцисса точки минимума. Найдём её ординату y(2)=16-36+24+1=5.

(2;5) – точка минимума

Нанесём эти точки на координатную плоскость (рис. 2).

3. Определим промежутки выпуклости графика функции

$$y'' = (6x^2 - 18x + 12)' = 12x - 18$$

$$12x\text{-}18=0;\ 12x=18;\ x = \frac{3}{2}.$$

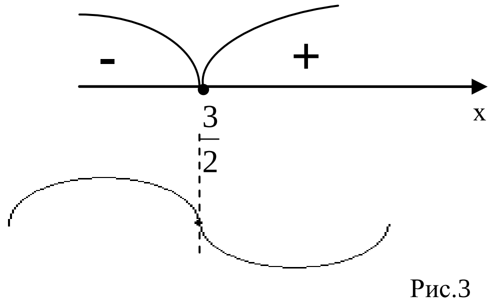


Рис.3

Нанесём точку на числовую прямую и определим знак второй производной на каждом интервале

На промежутке $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ график функции выпуклый (выпуклый вверх), а на промежутке $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ вогнутый (или выпуклый вниз)

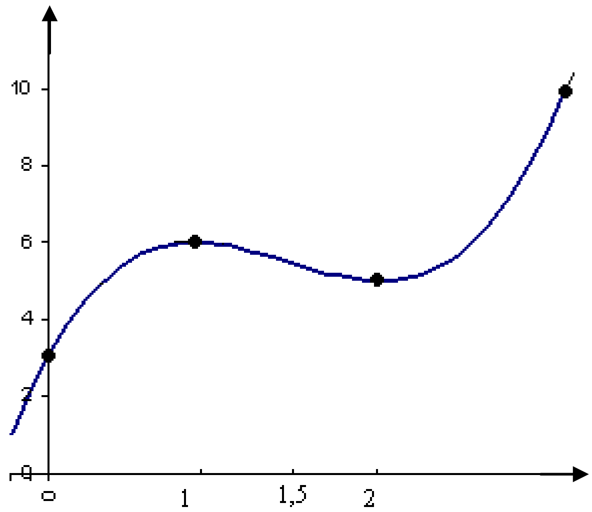
Т. к. проходя через точку x=3/2, вторая производная меняет свой знак, то x=3/2 – абсцисса точки перегиба. Найдём её ординату: $y\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\frac{27}{8} - 9\cdot\frac{9}{4} + 12\cdot\frac{3}{2} + 1 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 19 = \frac{-54+76}{4} = \frac{22}{4} = 5{,}5$

$$\left(1\frac{1}{2};5\frac{1}{2}\right)$$ - точка перегиба.

Нанесём точку на координатную плоскость.

4. Возьмём несколько дополнительных точек:

x	0	3
y	1	10



5. Построим график функции

Пример 2. Исследовать функцию $y=-\frac{1}{6}x^3+2x$ и построить её график.

1. Область определения D(y)=R.
2. $y(-x)=-\frac{1}{6}(-x)^3+2(-x)=\frac{1}{6}x^3-2x=-y(x)$. Является нечётной. Значит график симметричен относительно начала координат.
3. Определим точки пересечения с осями координат:

$$\text{Ox: } y=0; \Rightarrow \quad -\frac{1}{6}x^3+2x=0$$

$$x^3-12x=0;$$

$$x\cdot(x^2-12)=0;$$

$$x\cdot\left(x-\sqrt{12}\right)\cdot\left(x+\sqrt{12}\right)=0$$

$$x_1=0 \quad x_2=\sqrt{12} \quad x_3=-\sqrt{12}$$

Нанесём на координатную плоскость полученные точки $(0;0)$; $\left(\sqrt{12};0\right)$; $\left(-\sqrt{12};0\right)$.

4. Определим промежутки знакопостоянства функции $y=-\frac{1}{6}x^3+2x$. Для этого нули функции нанесём на числовую прямую в порядке возрастания, функцию разложим на множители и определим её знак на каждом интервале (рис.1):

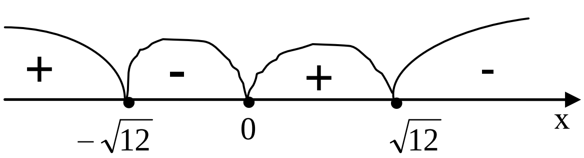


Рис.1

$$y=-\frac{1}{6}x(x^2-12)=-\frac{1}{6}x\cdot\left(x-\sqrt{12}\right)\cdot\left(x+\sqrt{12}\right)$$

Можно сделать вывод, что график функции будет располагаться выше оси Ox на интервалах $x\in\left(-\infty;-\sqrt{12}\right)\cup\left(0;\sqrt{12}\right)$ и ниже оси Ox на интервалах $x\in\left(-\sqrt{12};0\right)\cup\left(\sqrt{12};+\infty\right)$.

5. Определим промежутки монотонности и экстремумы функции:

Найдём критические точки (точки, в которой производная равна нулю или не существует)

$$y'=-\frac{1}{2}x^2+2$$

$$-\frac{1}{2}x^2+2=0 \quad |*(-2);$$

$$x^2-4=0; \quad (x-2)(x+2)=0;$$

$x_1=2$; $x_2=-2$

Нанесём точки на числовую прямую и определим знаки производной на каждом интервале

$$y'=-\frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

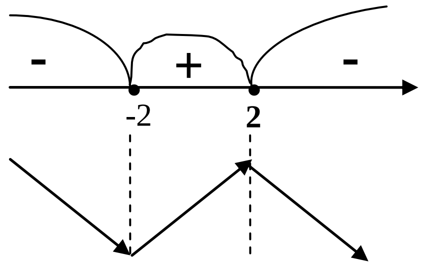


Рис.2

Получили схему поведения функции (рис.2), из которой видно, что функция убывает на промежутках $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ и возрастает на промежутке $x\in(-2;2)$.

Функция имеет точки экстремума:

Т. к. производная, проходя через точку x=2, меняет свой знак с «+» на «-», то x=2 – абсцисса точки максимума. Найдём её ординату $y(2)=-\frac{1}{6}\cdot8+4=-\frac{4}{3}+4=\frac{-4+12}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

$\left(2;2\frac{2}{3}\right)$ – точка максимума

Т. к. производная, проходя через точку x=-2, меняет свой знак с «-» на «+», то x=-2 – абсцисса точки минимума. Учитывая, что функция нечётная, то

$\left(-2;-2\frac{2}{3}\right)$ – точка минимума

Нанесём эти точки на координатную плоскость.

6. Определим промежутки выпуклости графика функции

$$y''=-x$$

-x=0; x=0.

Нанесём точку на числовую прямую и определим знак второй производной на каждом интервале

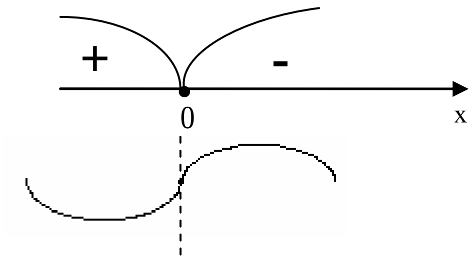


Рис.3

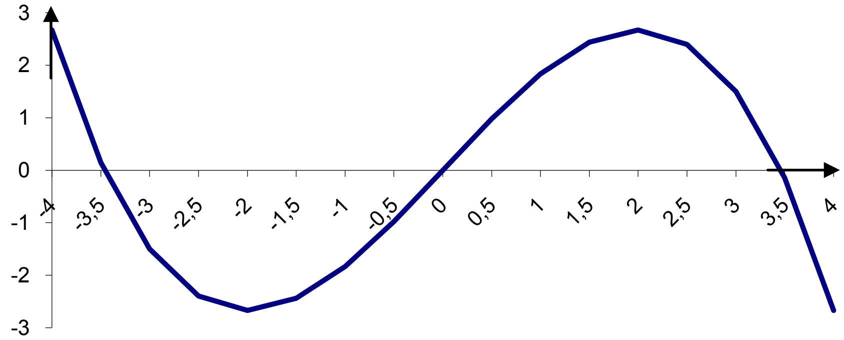
На промежутке $x\in(-\infty;0)$ график функции вогнутый (или выпуклый вниз), а на промежутке $x\in(0;+\infty)$ выпуклый (выпуклый вверх).

Т. к. проходя через точку x=0, вторая производная меняет свой знак, то x=0 – абсцисса точки перегиба. Найдём её ординату: $y(0)=-\frac{1}{6}\cdot0+2\cdot0=0$

(0;0) – точка перегиба.

Нанесём точку на координатную плоскость.

7. Построим график функции



Пример 3. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ и построить ее график

1. Область определения: $x \in R$
2. $y(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} - (-x) = \sqrt[3]{x^2} + x \neq \pm y(x)$, значит функция не является четной и не является нечетной
3. Определим точки пересечения с осями координат:

$\sqrt[3]{x^2} - x = 0$ или $x^{\frac{2}{3}} - x = 0$

$x^{\frac{2}{3}}(1 - x^{\frac{1}{3}}) = 0$

$x^{\frac{2}{3}} = 0$ или $1 - x^{\frac{1}{3}} = 0$

x=0 $\quad$ $x^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow x = 1$

Итак, функция равна нулю при x=0 или x=1.

4. Определим промежутки знакопостоянства функции $y = \sqrt[3]{x^2} - x$. Для этого нули функции нанесём на числовую прямую в порядке возрастания, функцию разложим на множители и определим её знак на каждом интервале

$$y' = \sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})$$

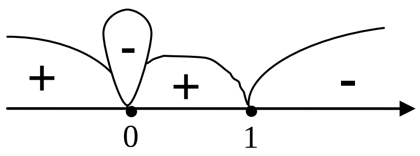


Рис.1

Можно сделать вывод, что график функции будет располагаться выше оси Ох на интервалах $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ и ниже оси Ох на интервале $x \in (1; +\infty)$.

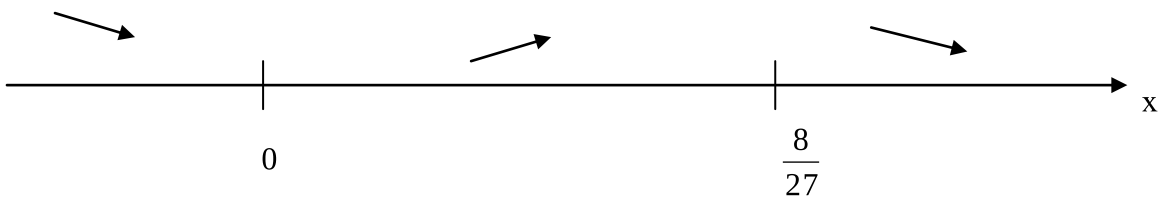
5. Находимэкстремумы функции, промежутки монотонности:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = 0$$

$$\frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$

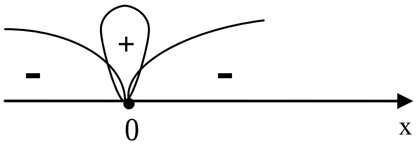
Критические точки: x=0 и $x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. После проверки знака после первой производной получим:



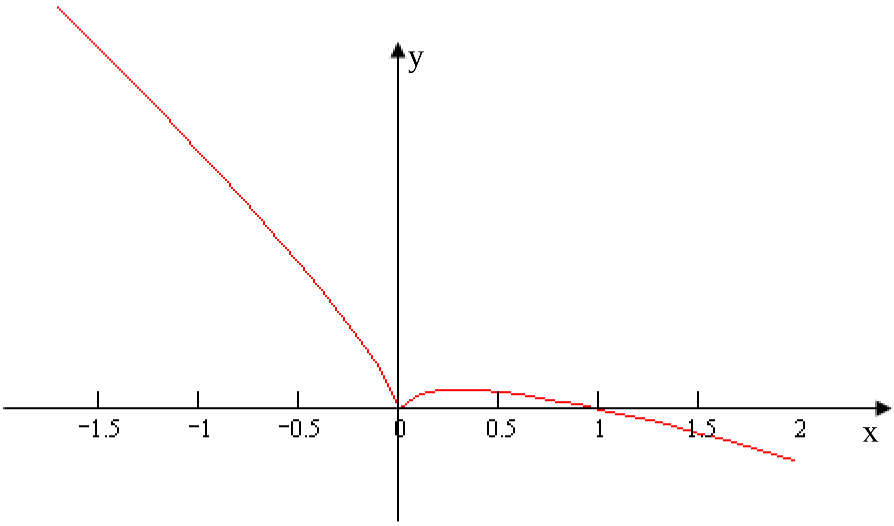
Максимума функция достигает в точке $\left(\frac{8}{27}; \frac{4}{27}\right)$, минимума в точке (0;0) (*Точка x=0 является острым минимумом, т. к.* $y'(0)$ *не существует, но x=0* $\in D(y)$ *функции*). Функция возрастает на интервале ($0; \frac{8}{27}$) и убывает на интервалах $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{27}; +\infty\right)$.

6. Определим промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба:

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$



Вторая производная в ноль не обращается, значит точка x=0 является единственной критической точкой второй производной. Но т.к. (0;0) является минимумом и $y'' < 0$ при любых значениях аргумента, кроме x=0, то график функции не имеет точек перегиба и выпуклый вверх при любом x.



Контрольные вопросы:

1) Что называется областью определения функции?
2) Какая функция называется чётной (нечётной)? Какие условия для этого должны выполняться? Каковы графики чётной (нечётной) функции?
3) Как найти нули функции?
4) Как находятся промежутки знакопостоянства функции?
5) Как найти промежутки монотонности функции и точки экстремума?
6) Как найти точки перегиба и промежутки выпуклости функции?