МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Филиал «Молодечненский государственный политехнический колледж» учреждения образования «Республиканский институт профессионального образования»

# **Практическое занятие:** Вычисление площадей поверхности объёмов конуса, усечённого конуса.

**Разработчик:** И. А. Кочеткова

**Цель работы:**

1) Повторить и закрепить основные элементы конуса и его сечений.
2) Выработать умения делать к задачам наглядные чертежи.
3) Повторить формулы и понятия планиметрии: площадь круга, длина окружности, центральный и вписанные углы, формулы площадей треугольника, прямоугольника, трапеции;
4) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Конус»

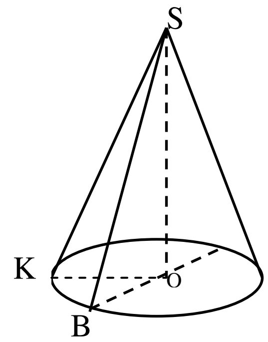
**Оборудование:** карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

**Порядок выполнения работы:**

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
   a. При вращении какого многоугольника получается конус? Усеченный конус?
   b. Перечислите основные элементы конуса.
   c. Дайте определения радиусу, хорде, диаметру окружности. По каким формулам можно найти площадь круга и длину окружности?
   d. Дайте определения образующей и высоте конуса. Что такое ось конуса.
   e. Что такое центральный угол и как он связан с дугой?
   f. Как найти объём конуса и площадь его поверхности?
   g. Как найти объём усеченного конуса и площадь его поверхности?
   h. Перечислите основные сечения конуса плоскостью. Как найти площади этих сечений?
   i. Что такое угол между плоскостями и как его построить?
   j. Каковы свойства параллельных сечений конуса?
3. Изучить условия задач. Определить способ их решения.
4. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.

# *Указания к выполнению практической работы*

## *<u>Теория</u>*




**<u>Опр.</u>** Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, называется **<u>конусом</u>**.

На рис. конус получен при вращении прямоугольного $\Delta SOK$ вокруг оси, содержащей его сторону SO.
SO – ось конуса. Это значит, что конус обладает симметрией.

## Элементы конуса

1) **<u>Опр.</u>** Отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой на окружности, называется **<u>образующей</u>** конуса.

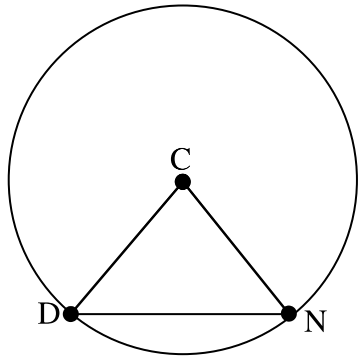
SB=SK=L - образующие конуса. Их у конуса бесконечно много и все они равны между собой.

2) **<u>Опр.</u>** Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса в центр основания, называется **<u>высотой</u>** конуса.

SO=H - высота конуса. У конуса только одна высота.

3) Основание конуса – это круг.

**<u>Радиус</u> <u>основания</u> <u>конуса</u>** – это отрезок, соединяющий центр круга с любой точкой окружности
R=DC=CN=AB

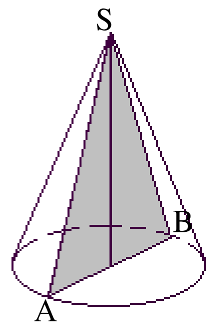



**<u>Хорда</u> <u>основания</u>** – это отрезок, который соединяет любые две точки окружности
DN – хорда
**<u>Диаметр</u>** – это хорда, которая проходит через центр круга
Хорда отсекает от окружности дуги DN и ND.
Из тригонометрии мы знаем, что длина дуги измеряется соответствующим центральным углом.
**<u>Центральный угол</u>** – это угол, вершина которого находится в центре окружности.
$\angle DCN$ – центральный угол. Величина дуги DN равна величине соответствующего центрального угла $\angle DCN$

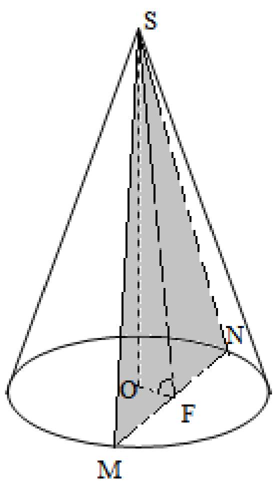
$$\boxed{\angle DCN = \cup DN}$$

## Сечения конуса

1) Если плоскость проходит через ось конуса, то полученное сечение называется осевым и представляет собой равнобедренный треугольник.



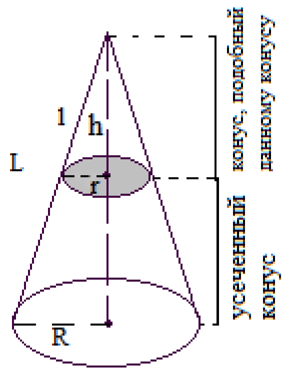

$\Delta ASB$ - равнобедренный




2) Если плоскость проходит через две образующие конуса и пересекает основание по хорде, то в сечении также получается равнобедренный треугольник.

$\Delta SMN$- равнобедренный, т. к. SM, SN- образующие конуса.
$\angle SFO$ – угол между секущей плоскостью и плоскостью основания ($SF \perp MN$, $OF \perp MN$)

3) Если плоскость проходит перпендикулярно оси (параллельно основаниям), то в сечении получаем круг.




а) Этот круг подобен кругу в основании

b) площадь сечения так относится к площади основания, как квадраты высот получившихся конусов $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$

c) При пересечении конуса плоскостью получается конус, подобный исходному конусу. И плоскость разбивает все отрезки на пропорциональные части:

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} = \frac{l}{L}$$

**Опр**. Часть конуса, заключённая между основанием и сечением, параллельным основанию, называется **усечённым конусом**.

## Площадь поверхности и объём конуса

1) Площадь боковой поверхности: $\boxed{S_{бок} = \pi RL}$

2) Площадь полной поверхности: $\boxed{S_{полн} = \pi RL + \pi R^2}$

3) Объём конуса: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 H}$

## Площадь поверхности и объём усечённого конуса

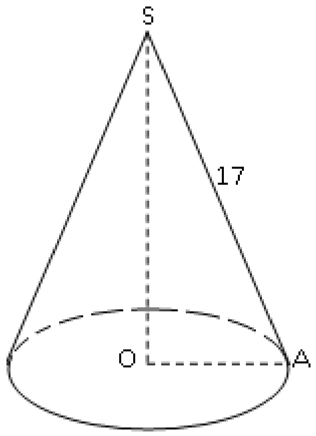
1) Площадь боковой поверхности: $\boxed{S_{бок} = \pi(R + r)L}$

2) Площадь полной поверхности: $\boxed{S_{полн} = \pi(R + r)L + \pi R^2 + \pi r^2}$

3) Объём конуса: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + Rr + r^2)}$

### *Решения типовых задач*

**Задача1.** Найти высоту конуса, если его боковая поверхность равна136 π см$^2$ и образующая 17 см.




Дано: SA=17; $S_{бок} = 136\pi$
Найти: SO

Решение:

1) В задаче известна образующая L=17 и $S_{бок} = 136\pi$. Из формулы площади боковой поверхности найдем радиус R

$$S_{бок} = \pi RL$$

$$R = \frac{S_{бок}}{\pi L} = \frac{136\pi}{17\pi} = 8$$

OA=R=8

2) Рассмотрим прямоугольный Δ SOA (SO – высота, значит SO ⊥ площади основания) и найдем SO по теореме Пифагора:

$$SA^2 = OS^2 + OA^2$$

$$OS^2 = SA^2 - OA^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$SO = \sqrt{225} = 15$$

Ответ: 15.

**Задача 2.** Площадь основания конуса равна 9 π см$^2$, а площадь полной поверхности равна 24 π см$^2$. Найти объем конуса.

Дано: $S_{осн} = 9\,\pi$; $S_{полн} = 24\,\pi$
Найти: V
Решение:
Для вычисления объема конуса надо знать радиус R и высоту H

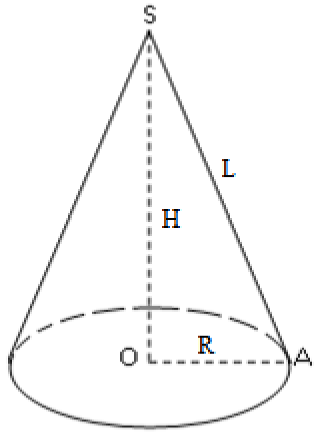
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

1) Из формулы площади основания (круга) найдем радиус:

$$S_{осн} = \pi R^2$$
$$R^2 = \frac{S_{осн}}{\pi} = \frac{9\pi}{\pi} = 9$$
$$R = \sqrt{9} = 3$$

2) Из формулы полной поверхности конуса найдем образующую L

$$S_{полн} = \pi RL + \pi R^2$$
$$24\pi = 3\pi L + 9\pi$$
$$24\pi - 9\pi = 3\pi L$$
$$15\pi = 3\pi L$$
$$L = \frac{15\pi}{3\pi} = 5$$



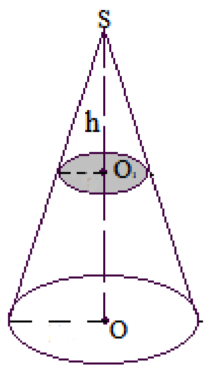

3) Из прямоугольного Δ SOA (SO – высота, значит SO ⊥ площади основания) и найдем SO по теореме Пифагора:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$
$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$
$$SO = \sqrt{16} = 4$$

4) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi$

Ответ: $12\pi$

**Задача 3.** Высота конуса 12. На каком расстоянии от вершины нужно провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна $\frac{5}{6}$ площади основания.




Дано: SO=12; $S_{сеч} = \frac{5}{6} S_{осн}$

Найти: $SO_1$

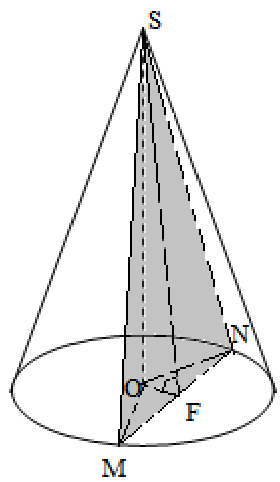
Решение:

Из свойств сечений параллельных основанию знаем, что площадь сечения так относится к площади основания, как квадраты высот получившихся конусов

$$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{SO_1{}^2}{SO^2}$$
$$\frac{\frac{5}{6}S_{осн}}{S_{осн}} = \frac{SO_1{}^2}{12^2}$$
$$\frac{5}{6} = \frac{SO_1{}^2}{144}$$
$$SO_1{}^2 = \frac{5 \cdot 144}{6} = 5 \cdot 24 = 120$$
$$SO_1 = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

Ответ: $2\sqrt{30}$

**Задача 4.** Через две образующие конуса проведена плоскость, наклонённая к плоскости основания под углом $45^0$. Она отсекает в основании конуса дугу в $120^0$. Найти площадь сечения, если радиус основания конуса равен $2\sqrt{3}$.




Дано: SM, SN – образующие; $\angle SFO=45^0$; $\cup MN=120^0$;

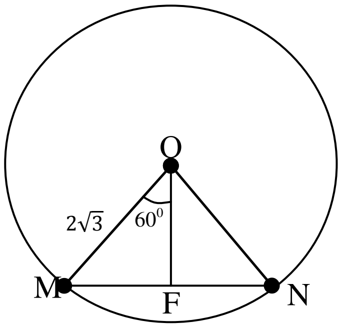
R=OM=ON=$2\sqrt{3}$

Найти: $S_{\Delta MSN}$

Решение:

$$S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2}ha = \frac{1}{2} \cdot SF \cdot MN$$

1) По условию задачи сечение отсекает от окружности основания дугу




в $120^0$. А так как величина дуги равна величине соответствующего центрального угла, опирающегося на данную дугу, то можно сказать, что $\angle MON=120^0$.

2) Так как OM=ON как радиусы, то $\Delta MON$ - равнобедренный. Тогда OF является не только высотой, но и медианой и биссектрисой. Значит $\angle MOF=60^0$

3) Из прямоугольного $\Delta MFO$ найдем MF:

$$sin60^0 = \frac{MF}{MO}$$

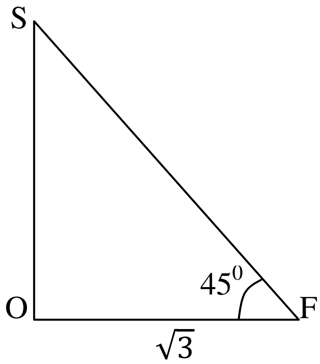
$$MF = MO \cdot sin60^0 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Значит **MN=6**.

4) Из этого же прямоугольного $\Delta$ MFO найдем OF:

$$cos60^0 = \frac{OF}{MO}$$

$$OF = MO \cdot cos60^0 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$




5) Рассмотрим прямоугольный $\Delta$ SOF (SO – высота конуса):
В нем известны угол $\angle SFO=45^0$ и катет $OF = \sqrt{3}$, найдем гипотенузу SF

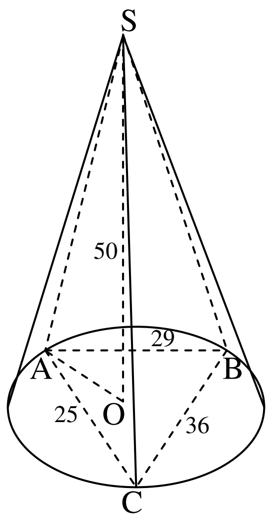
$$cos45^0 = \frac{OF}{SF}$$

$$SF = \frac{OF}{cos45^0} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

6) $S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2} \cdot SF \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 6 = 3\sqrt{6}$

Ответ: $3\sqrt{6}$

**<u>Задача 5.</u>** В конус высотой 50 вписана $\Delta$-ная пирамида, стороны основания которой равны 25, 29 и 36. Вычислить разность между объемами двух тел.




Дано: SABC – пирамида; SO=50; AC=25; AB=29; BC=36

Найти: $V_{\text{конуса}} - V_{\text{пирамиды}}$

Решение:

Найдем объем пирамиды:

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \text{H}$$

Площадь основания пирамиды – это площадь $\Delta ABC$. Используем формулу Герона

$$p = \frac{25 + 29 + 36}{2} = 45$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{45 \cdot (45-25) \cdot (45-29) \cdot (45-36)} =$$
$$= \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = \sqrt{900 \cdot 16 \cdot 9} = 30 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = \frac{1}{3} \cdot 360 \cdot 50 = 120 \cdot 50 = 6000$$

2) $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 H$

H=50, а R – радиус конуса – это радиус окружности, описанной около $\Delta ABC$. Значит его можно найти по формуле

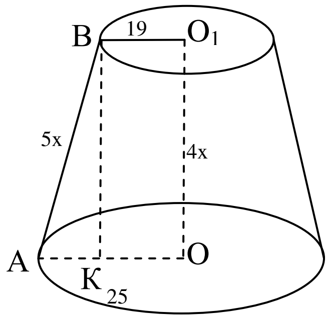
$$R = \frac{abc}{4S_{\Delta}} = \frac{25 \cdot 29 \cdot 36}{4 \cdot 360} = \frac{25 \cdot 29}{4 \cdot 10} = \frac{5 \cdot 29}{4 \cdot 2} = \frac{145}{8} = 18\frac{1}{8}$$

$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{145}{8}\right)^2 \cdot 50 \approx \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \frac{21025}{64} \cdot 50 \approx 17\,192{,}3$

$V_{\text{конуса}} - V_{\text{пирамиды}} = 17\,192{,}3 - 6000 = 11\,192{,}3$

Ответ. 11 192,3

**<u>Задача 6.</u>** В усеченном конусе радиусы оснований 25 и 19, образующая относится к высоте как 5:4. Найти $S_{\text{полн}}$ и V усеченного конуса.




Дано: $r = BO_1 = 19$; $R = AO = 25$

$$\frac{AB}{OO_1} = \frac{5}{4}$$

Найти: $S_{\text{полн}}$ и V

<u>Решение:</u>

1) $\frac{AB}{OO_1} = \frac{5}{4}$, значит $AB = 5x$, $OO_1 = 4x$ (x – коэффициент пропорциональности). Для нахождения x нужно составить уравнение.
2) Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABO_1O$. Опустим из вершины B высоту BK и получим прямоугольник $BKOO_1$ и прямоугольный треугольник AKB.
3) $KO = BO_1 = 19$, значит отрезок $AO = 25$ разобьется на два отрезка $KO = 19$ и $AK = 25 - 19 = 6$
4) $BK = OO_1 = 4x$

   В $\Delta$ AKB стороны связаны теоремой Пифогора, так как это прямоугольный треугольник:

$$AB^2 = BK^2 + AK^2$$
$$(5x)^2 = (4x)^2 + 6^2$$
$$25x^2 = 16x^2 + 36$$
$$25x^2 - 16x^2 = 36$$
$$9x^2 = 36$$
$$x^2 = \frac{36}{9}$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Значит образующая $AB = 5x = 10$, а высота $OO_1 = 4x = 8$

5) Теперь можем найти объем и $S_{\text{полн}}$ усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi H (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot (25^2 + 25 \cdot 19 + 19^2) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot (625 + 475 + 361) =$$
$$= \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot 1461 = 8\pi \cdot 487 = 3896\pi$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(R + r)L + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(25 + 19) \cdot 10 + \pi \cdot 25^2 + \pi \cdot 19^2 = 440\pi + 625\pi + 361\pi$$
$$= 1426\pi$$

Ответ: $V = 3896\pi$;  $S_{\text{полн}} = 1426\pi$