Практическое занятие
Тригонометрические выражения. Обратные тригонометрические функции

Цель работы:

1) повторить знания и навыки использования формул приведения;
2) повторить тригонометрические функции числового аргумента; формулы двойного и половинного аргумента;
3) привести в систему знания по обратным тригонометрическим функциям.

Оборудование: карта индивидуального задания.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практических заданий.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий и решить их.
4. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Пример 1. Вычислите: a) $\operatorname{tg}(-690^0)$; b) $\cos\left(\frac{37\pi}{3}\right)$

Решение.

Для выполнения данного задания будем использовать:

1) чётность и нечётность тригонометрических функций:

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$$

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x}$$

2) формулы приведения.

a) $\operatorname{tg}(-690^0) = -\operatorname{tg}690^0 = -\operatorname{tg}(2 \cdot 360^0 - 30^0) = -\operatorname{tg}(360^0 - 30^0) =$

$= -(-\operatorname{tg}30^0) = \operatorname{tg}30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\cos\left(\frac{37\pi}{3}\right) = \cos\left(12\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Найдите $\sin 2x$ и $\cos\frac{x}{2}$, если $\operatorname{ctg}x = \frac{3}{4}$, если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

1) $\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

2) Найдём тригонометрическую функцию $\sin x$:

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{9}{16}; \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{25}{16};$$

$sin^2\, x = \frac{16}{25}; sin\, \alpha = \underset{I\text{ ч.}}{\pm}\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ - поставим знак «+», так как x находится в

I четверти.

3) Для нахождения тригонометрической функции $\cos x$ используем основное тригонометрическое тождество $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \underset{\text{I ч.}}{\pm}\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$.

Поставим знак «+», так как x находится в I четверти, получим $\cos x = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

4) $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

5) $\boxed{\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$

$0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$ - I четверть.

$$\cos\frac{x}{2} \underset{\text{I ч.}}{=} \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{5}:2} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $\sin 2x = \frac{24}{25}$; $\cos 2x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Пример 3. Вычислите: $\cos\left(\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

Решение.

Найдём значение для каждой обратной тригонометрической функции:

1) $\arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

3) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

4) $-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + 3\cdot\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{-\pi-\pi+4\pi}{2} = \pi$;

5) $\cos\pi = -1$.

Ответ: -1.

Пример 4. Вычислите: $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

Решение.

1) Пусть $\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{5}{13}; \sin\alpha < 0 \\ \alpha \in \text{IV четверти} \end{cases}$

2) Найдём $\cos 2\alpha$.

Подберём формулу для $\cos 2\alpha$:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{25}{169} = \frac{169-50}{169} = \frac{119}{169}$$

Ответ: $\frac{119}{169}$.

Пример 5. Найдите область определения функции $y = \arcsin\left(\frac{x^2}{2x+8}\right)$

Решение.

Из определения знаем, что функции arcsin$x$ и arccos$x$ имеют значения только в том случае, если $x \in [-1; 1]$.

Необходимо найти такие значения переменной x, при которых выражение

$$\frac{x^2}{2x+8} \in [-1;1]$$

или $-1 \le \frac{x^2}{2x+8} \le 1 \ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2x+8} \ge -1 \\ \frac{x^2}{2x+8} \le 1 \end{cases}$

1) Решим первое неравенство системы методом интервалов:

$$\frac{x^2}{2x+8} \ge -1$$

$$\frac{x^2}{2x+8} + 1 \ge 0$$

$$\frac{x^2+2x+8}{2x+8} \ge 0$$

Нули функции:

$x^2 + 2x + 8 = 0$

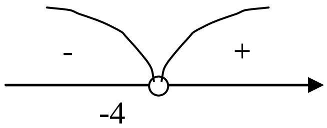
$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0$

Значит, функция нулей не имеет.

Точки разрыва:

$2x + 8 = 0$

$x = -4$



$x \in (-4; +\infty)$

2) Решим второе неравенство системы методом интервалов:

$$\frac{x^2}{2x+8} \le 1$$

$$\frac{x^2}{2x+8} - 1 \le 0$$

$$\frac{x^2-2x-8}{2x+8} \le 0$$

Нули функции:

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 = 6^2$

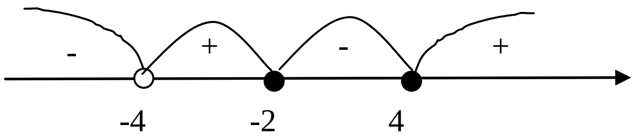
$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4; \quad x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

Точки разрыва:

$2x + 8 = 0$

$x = -4$

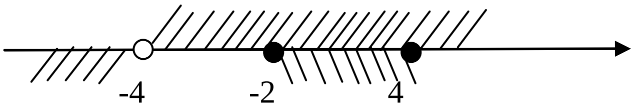
Разложим неравенство на линейные множители: $(x-4)(x+2)(2x+8) \le 0$



$x \in (-\infty; -4) \cup [-2; 4]$

3. Определим общее решение системы:

$$\begin{cases} x \in (-4; +\infty) \\ x \in (-\infty; -4) \cup [-2; 4] \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-2; 4]$.

Контрольные вопросы

1) Для чего используются формулы приведения?
2) Назовите правило названия функции и правило знака при применении формул приведения.
3) Запишите основное тригонометрическое тождество.
4) Какому промежутку принадлежат значения arccos*x*, arcsin*x*, arctg*x*, arcctg*x*?
5) Какие из обратных тригонометрических функций являются нечётными?
6) Найдите arcos(-*x*), arcsin(-*x*), arctg(-*x*), arcctg(-*x*).

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1) Вычислить: а) $\sin 330^0$; б) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$	1) Вычислить: а) $\sin(-420^0)$; б) $\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)$	1) Вычислить: а) $ctg 225^0$; б) $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$
2) Найти $\sin x$, если $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	2) Найти $\cos x$, если $\cos 2x=-\frac{1}{2}$; $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$	2) Найти $\cos\frac{x}{2}$, если $ctg\,x=\frac{12}{5}$; $x\in\left(3\pi;\frac{7\pi}{2}\right)$
3) Вычислить: $tg\left(\arccos(-1)+2arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+arctg0\right)$	3) Вычислить: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\right.$ $\left.+arctg(-\sqrt{3})\right)$	3) Вычислить: $tg\left(6\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\right.$ $\left.+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
4) Вычислить: $32\cdot cos\left(2arccos\frac{1}{4}\right)$	4) Вычислить: $25\cdot cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right)$	4) Вычислить: $9\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$
5) Найти область определения функции: $y=\arcsin\left(\frac{x^2}{2x-3}\right)$	5) Найти область определения функции: $y=\arccos\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)$	5) Найти область определения функции: $y=\arcsin\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1) Вычислить: а) $\mathrm{tg}495^0$; б) $\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right)$	1) Вычислить: а) $\mathrm{tg}(-480^0)$; б) $\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)$	1) Вычислить: а) $\cos(-660^0)$; б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{29\pi}{3}\right)$
2) Найти $\sin 2x$, если $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{3}$; $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$	2) Найти $\sin 2x$, если $\sin x = -\frac{5}{13}$; $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	2) Найти $\cos 2x$, если $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4}$; $x \in (180^0; 270^0)$
3) Вычислить: $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$	3) Вычислить: $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) + 3\mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)$	2) Вычислить: $\mathrm{tg}\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}(-1) + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right)$
4) Вычислить: $36 \cdot cos\left(2arcsin\frac{5}{6}\right)$	4) Вычислить: $49 \cdot \cos\left(2\arcsin\frac{4}{7}\right)$	4) Вычислить: $16 \cdot \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$
5) Найти область определения функции: $y = \arccos\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$	5) Найти область определения функции: $y = \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	5) Найти область определения функции: $y = \arccos\left(\frac{3}{x+2}\right)$

Вариант 7	**Вариант 8**	**Вариант 9**
1) Вычислить: а) $\cos(-570^0)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{27\pi}{4}\right)$	1) Вычислить: а) $\operatorname{ctg}(-540^0)$; б) $\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)$	1) Вычислить: а) $\sin(-585^0)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{35\pi}{4}\right)$
2) Найти $\sin\frac{x}{2}$, если $\cos x = \frac{3}{4}$; $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	2) Найти $\sin\frac{x}{2}$, если $\operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}$; $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	2) Найти $\cos\frac{x}{2}$, если $\operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}$; $x \in \left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right)$
3) Вычислить: $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. +6\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$	3) Вычислить: $\sin\left(\arccos 0 + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$	3) Вычислить: $sin\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. +\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$
4) Вычислить: $27 \cdot \cos\left(2\arccos\frac{2}{3}\right)$	4) Вычислить: $50 \cdot \cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$	4) Вычислить: $75 \cdot \cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$
5) Найти область определения функции: $y = \arcsin\left(\frac{x-2}{x}\right)$	5) Найти область определения функции: $y = \arcsin\left(\frac{x}{3-x}\right)$	5) Найти область определения функции: $y = \arcsin\left(\frac{1}{3x}\right)$

Вариант 10	**Вариант 11**	**Вариант 12**
1) Вычислить: а) $\operatorname{tg}780^0$; б) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$	1) Вычислить: $\operatorname{tg}(-510^0)$; б) $\cos\left(\frac{28\pi}{3}\right)$	1) Вычислить: а) $\operatorname{ctg}(-945^0)$; б) $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)$
2) Найти $\sin\frac{x}{2}$, если $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}$; $x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$	2) Найти $\sin\frac{x}{2}$, если $\cos x=-\frac{5}{13}$; $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	2) Найти $\cos 2x$, если $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}$; $x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$
3) Вычислить: $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+4\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\right.$ $\left.+\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right)$	3) Вычислить: $\sin\left(3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\right.$ $\left.+2\operatorname{arcctg}(-1)+3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$	3) Вычислить: $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\right.$ $\left.+\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\arccos(-1)\right)$
4) Вычислить: $64\cdot\cos\left(2\arccos\frac{3}{8}\right)$	4) Вычислить: $18\cdot\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$	4) Вычислить: $128\cdot\cos\left(2\arcsin\frac{5}{8}\right)$
5) Найти область определения функции: $y=\arccos\left(x^2-3\right)$	5) Найти область определения функции: $y=\arcsin\left(\frac{3}{x^2-2x}\right)$	5) Найти область определения функции: $y=\arccos\left(\frac{4}{x^2+3x}\right)$