МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Филиал «Молодечненский государственный политехнический колледж» учреждения образования «Республиканский институт профессионального образования»

Практическое занятие: Шар и сфера. Комбинации многогранников и тел вращения.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Повторить и закрепить основные элементы шара.
2) Выработать умения делать к задачам наглядные чертежи.
3) Повторить формулы и понятия планиметрии: площадь круга, длина окружности, формулы площадей треугольника, прямоугольника, трапеции, ромба;
4) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Шар»

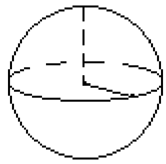
Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
   a. Дать определение шара и сферы; радиуса; диаметра; хорды.
   b. Перечислите основные части шара и дайте им определения.
   c. Какой шар называется описанным около многогранника? Около каких многогранников и тел вращения шар можно описать всегда?
   d. Какой шар называется вписанным в многогранник? В какие многогранники и тела вращения шар можно вписать всегда?
   e. Как найти площадь треугольника? Как найти радиус, описанной около треугольника окружности? Как найти радиус, вписанной в треугольник окружности?
   f. Где находится центр вписанной в ромб окружности? И как найти ее радиус?
   g. Где находится центр вписанной в трапецию окружности? И как найти ее радиус? Как найти радиус окружности, описанной около трапеции?
   h. Как найти радиус, описанной около прямоугольника окружности?
   i. Что такое угол между плоскостями и как его построить? В какую пирамиду можно вписать шар? Где находится центр шара, вписанного в пирамиду?
3. Изучить условия задач. Определить способ их решения.
4. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Теория



Шар – фигура, полученная при вращении полукруга вокруг своего диаметра.

Сфера – это поверхность шара. Сфера состоит из множества точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой центром сферы.

Радиус шара (сферы) – это отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой на поверхности шара.

Хорда – это отрезок, который соединяет любые две точки сферы

Диаметр – это хорда, которая проходит через центр шара

1) Объём шара: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.
2) Площадь поверхности: $\boxed{S = 4\pi R^2}$

Комбинации многогранников и тел вращения.

Опр. Многогранник, все вершины которого принадлежат сфере, называется вписанным в шар, а шар называется описанным около многогранника.

Шар всегда можно описать:

1) около пирамиды, боковые рёбра которой равны. Тогда центр O шара лежит на высоте пирамиды;
2) около правильной усечённой пирамиды всегда. Тогда центр O шара лежит на высоте усечённой пирамиды, проходящей через центры оснований;
3) около прямой призмы, если около её основания можно описать окружность. Тогда центр O шара лежит в середине отрезка, соединяющего центры описанных около оснований окружностей;
4) около цилиндра всегда. Тогда центром шара служит центр симметрии осевого сечения цилиндра;
5) около конуса всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса;
6) около усечённого конуса всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса.

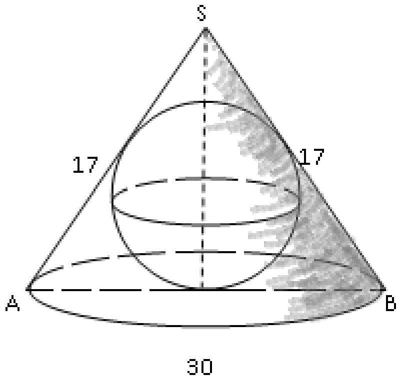
Опр. Многогранник, все грани которого касаются сферы, называется описанным около шара, а шар называется вписанным в многогранник.

Шар всегда можно вписать:

1) в конус. Тогда центром шара служит центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса;
2) в равносторонний цилиндр(осевое сечение- квадрат);
3) в прямую призму, когда в основание призмы можно вписать окружность, диаметр этой окружности равен высоте призмы $r_{шара} = R_{впис. в осн. окр.} = \frac{1}{2} H_{высоты призмы}$;
4) в пирамиду, боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания. Центр шара лежит на высоте пирамиды- это точка пересечения высоты с биссектрисой угла между апофемой и проекцией этой апофемы на плоскость основания.

Решение типовых примеров

Задача 1. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник со сторонами 17, 17 и 30. Найти V и $S_{пов.}$ вписанного шара.



Дано: SAB – осевое сечение конуса; AS=SB=17; AB=30

Найти: V и $S_{пов\ шара}$

Решение.

Из теории знаем, что шар всегда можно вписать в конус. Тогда центром шара служит центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса

Значит радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса, в Δ SAB

$$R_{шара} = r_{\Delta SAB} = \frac{S_\Delta}{p}$$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{17+17+30}{2} = 32$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{32\cdot(32-17)\cdot(32-17)\cdot(32-30)} =$$
$$= \sqrt{32\cdot 15\cdot 15\cdot 2} = \sqrt{64\cdot 15^2} = 8\cdot 15 = 120$$

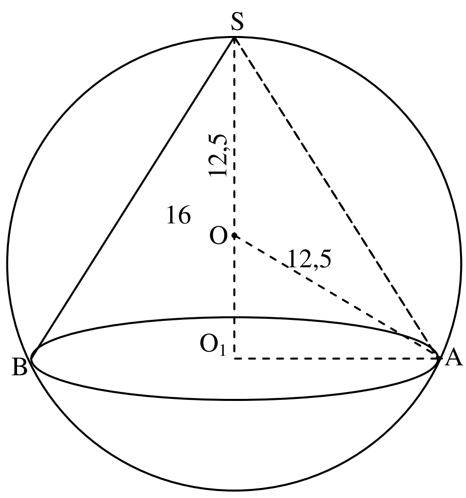
$$R_{шара} = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{15}{4}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3375}{64} = \frac{1125}{16}\pi$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{15}{4}\right)^2 = 4\pi\cdot\frac{225}{16} = \frac{225}{4}\pi$$

Ответ: $V = \frac{1125}{16}\pi$; $S = \frac{225}{4}\pi$

Задача 2. В сферу радиуса 12,5 см вписан конус, высота которого равна 16 см. Найти S осевого сечения конуса, его объем и S поверхности.



Дано: SAB – конус; R=SO=12,5
SO_1=16

Найти: $S_{\Delta ASB}$; $V_{конуса}$; $S_{полн.конуса}$

Решение

1) Найдем объем конуса: $V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

R=O_1A;   H= SO_1=16

OO_1= SO_1 – SO= 16 – 12,5 = 3,5

Найдем радиус конуса из прямоугольного треугольника OO_1A по теореме Пифагора:

$$AO^2 = O_1O^2 + O_1A^2$$
$$O_1A^2 = AO^2 - O_1O^2 = 12{,}5^2 - 3{,}5^2 =$$
$$= (12{,}5-3{,}5)(12{,}5+3{,}5) = 9\cdot 16 = 144$$
$$O_1A = \sqrt{144} = 12$$

$$R = 12 \Longrightarrow V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\cdot 12^2\cdot 16 = \frac{1}{3}\pi\cdot 144\cdot 16 = 768\pi$$

2) Площадь осевого сечения конуса – это площадь ΔSAB. Она равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot ah = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot SO_1 = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 16 = 192$$

3) Найдем поверхность конуса по формуле: $S_{полн.конуса} = \pi RL + \pi R^2$

Образующую L=SA найдем из SO_1A по теореме Пифагора:

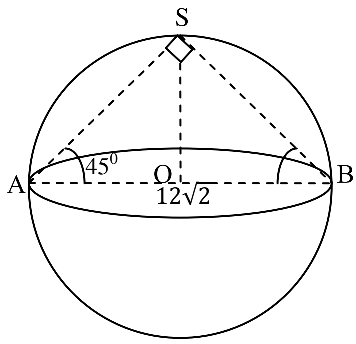
$$AS^2 = O_1S^2 + O_1A^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$$

$$AS = \sqrt{400} = 20$$

$$S_{\text{полн.конуса}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi \cdot 12 \cdot 20 + \pi \cdot 12^2 = 240\pi + 144\pi = 384\pi$$

Ответ: $V = 768\pi$; $S_{\Delta ASB} = 192$; $S_{\text{полн.конуса}} = 384\pi$

Задача 3. В сферу вписан конус, осевое сечение которого представляет собой прямоугольный Δ-к с гипотенузой равной $12\sqrt{2}$. Вычислить объем сферы и объем конуса.



Дано: ΔSAB – прямоугольный; $AB = 12\sqrt{2}$

Найти: S сферы

Решение:

Шар можно описать около конуса всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса.

Так как осевым сечением конуса по условию задачи служит прямоугольный треугольник, то центр описанной около него окружности находится на середине гипотенузы. Т.е. гипотенуза является диаметром описанной окружности.

$$R = \frac{1}{2}AB = 6\sqrt{2}$$

$$V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(6\sqrt{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \cdot \sqrt{2}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 2\sqrt{2} = 576\sqrt{2}\pi$$

Кроме этого осевым сечением конуса служит равнобедренный треугольник. Делаем вывод: ΔASB – прямоугольный и равнобедренный, значит углы при основании равны ∠A=∠B=45^0.

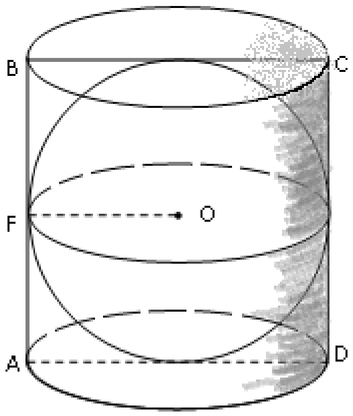
$$sin45^0 = \frac{SB}{AB} \Rightarrow \ SB = AB \cdot sin45^0 = 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$$

$$sin45^0 = \frac{SO}{AS} \Rightarrow \ SO = AS \cdot sin45^0 = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6\sqrt{2} = \frac{1}{3}\pi \cdot 72 \cdot 6\sqrt{2} = 144\sqrt{2}\pi$$

Ответ: $V_{\text{сферы}} = 576\sqrt{2}\pi$; $V_{\text{конуса}} = 144\sqrt{2}\pi$

Задача 4. В цилиндр, объем которого равен 250 π, вписан шар. Найти его объем.



Решение:

Шар всегда можно вписать в равносторонний цилиндр (осевое сечение которого квадрат)

ABCD – квадрат ⇒ AB=BC (высота цилиндра равна диаметру круга, лежащего в основании) ⇒ H=2R

ABCD – квадрат ⇒ радиус шара равен радиусу основания цилиндра

Известен объём цилиндра, поэтому выразим из формулы объема радиус R и найдем его численное значение:

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

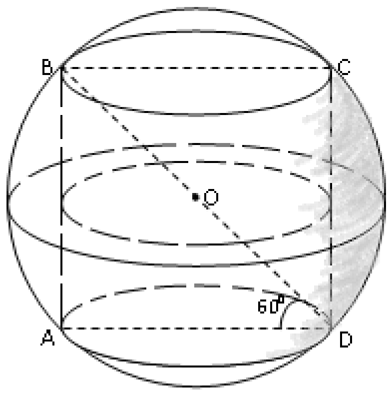
$$R^3 = \frac{V_{\text{цилиндра}}}{2\pi} = \frac{250\pi}{2\pi} = 125$$

$$R = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 125 = \frac{500}{3}\pi$$

Ответ: $\frac{500}{3}\pi$

Задача 5. В шар радиуса 12 см вписан цилиндр, в котором диагональ осевого сечения составляет с его основанием угол 60^0. Вычислить объём цилиндра.



Дано: $R_{шара}=12$; ABCD – осевое сечение цилиндра;
$\angle BDA=60^0$

Найти: $V_{цилиндра}$

Решение:

$V_{цилиндра} = \pi R^2 H$

Рассмотрим прямоугольный ΔBAD. Центр шара, точка О является серединой гипотенузы этого треугольника ⇒BD= 2R=24

$$sin60^0 = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AB = BD \cdot sin60^0 = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$H = 12\sqrt{3}$$

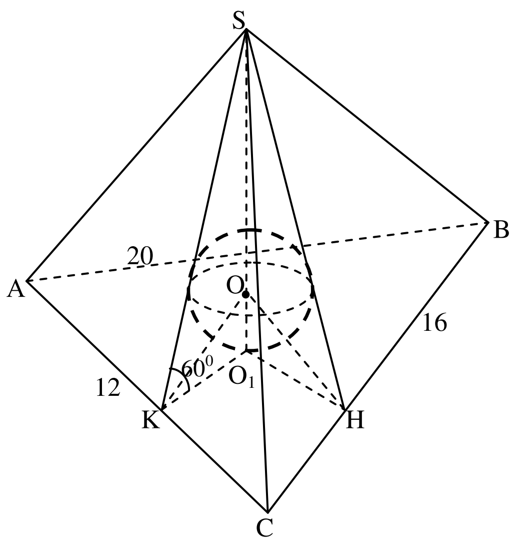
$$cos60^0 = \frac{AD}{BD} \Rightarrow AD = BD \cdot cos60^0 = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

$$R = \frac{1}{2}AD = 6$$

$$V_{цилиндра} = \pi R^2 H = \pi \cdot 6^2 \cdot 12\sqrt{3} = \pi \cdot 36 \cdot 12\sqrt{3} = 432\sqrt{3}$$

Ответ: $432\sqrt{3}$

Задача 6. В треугольную пирамиду со сторонами основания 20 см, 12 см и 16 см вписан шар. Найти его радиус, если двугранные углы при основании пирамиды равны по 60^0.



Дано: SABC – пирамида; AB=20; AC=12; BC=16
$\angle SKO_1=60^0$;

Найти: $R_{шара}$

Решение:

1) Из теории знаем, что шар всегда можно вписать в пирамиду, боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания. Центр шара лежит на высоте пирамиды- это точка пересечения высоты с биссектрисой двугранного угла при основании пирамиды.
Поэтому строим двугранные углы SKO_1 и SHO_1 и проводим биссектрисы этих углов до пересечения с высотой SO_1.

$$R_{шара}=OO_1$$

2) Из свойств пирамиды знаем, что если её боковые грани равнонаклонены к основанию, то высота проходит через центр вписанной в основание окружности, т. е. O_1 – центр вписанной в ΔABC окружности, тогда

$$KO_1 = r_\Delta = \frac{S_\Delta}{p}$$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{20 + 16 + 12}{2} = 24$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot (24-20) \cdot (24-16) \cdot (24-12)} =$$
$$= \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12} = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 12} = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 24} = 24 \cdot 4 = 96$$

$$r_\Delta = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{96}{24} = 4$$

$$KO_1 = 4$$

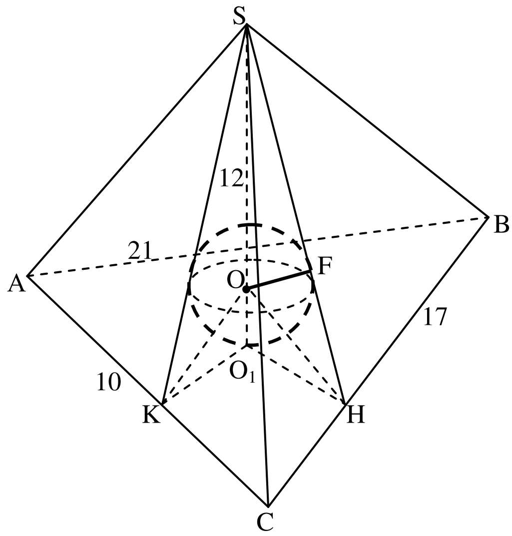
3) KO – биссектриса $\angle SKO_1$, значит она делит угол на два равных угла $\Rightarrow \angle OKO_1 = 30^0$.

4) Рассмотрим $\Delta\ KO_1O$. Он является прямоугольным, так как SO_1 – высота пирамиды. Знаем, что $KO_1=4$ и $\angle OKO_1 = 30^0$.

$$tg30^0 = \frac{OO_1}{KO_1} \Rightarrow OO_1 = KO_1 \cdot tg30^0 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

<u>Задача 7.</u> В треугольную пирамиду со сторонами основания 10 см, 17 см и 21 см вписан шар. Найти его радиус, если высота пирамиды равна 12 см, а двугранные углы при основании равны между собой.



1) Из теории знаем, что шар всегда можно вписать в пирамиду, боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания. Центр шара лежит на высоте пирамиды- это точка пересечения высоты с биссектрисой двугранного угла при основании пирамиды.

Поэтому строим двугранные углы SKO_1 и SHO_1 и проводим биссектрисы этих углов до пересечения с высотой SO_1.

$$R_{шара}=OO_1$$

2) Из свойств пирамиды знаем, что если её боковые грани равнонаклонены к основанию, то высота проходит через центр вписанной в основание окружности, т. е. O_1 – центр вписанной в ΔABC окружности, тогда

$$O_1H = r_\Delta = \frac{S_\Delta}{p}$$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{10+21+17}{2} = 24$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot(24-10)\cdot(24-21)\cdot(24-17)} =$$
$$= \sqrt{24\cdot 14\cdot 3\cdot 7} = \sqrt{6\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 3\cdot 7} = \sqrt{6\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2} = 6\cdot 2\cdot 7 = 84$$

$$r_\Delta = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{84}{24} = 3{,}5$$

$$HO_1 = 3{,}5$$

3) $\Delta\ SO_1H$ – прямоугольный (SO_1 – высота). $SO_1=12$, $HO_1=3{,}5$. По теореме Пифагора найдем третью сторону

$$SH^2 = O_1S^2 + O_1H^2 = 144 + 12{,}25 = 156{,}25$$

$$O_1A = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5$$

4) Проведем еще один радиус шара OF в точку касания шара и апофемы. $OF \perp SH$. Получили подобные треугольники ($\angle F = \angle\ O_1 = 90^0$, $\angle S$ – общий)

$$\Delta SO_1H \sim \Delta SFO$$

Значит стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{OF}{HO_1} = \frac{SO}{SH} \Rightarrow \frac{R}{3{,}5} = \frac{12-R}{12{,}5}$$

По свойству пропорции имеем: $12{,}5R = 3{,}5\cdot(12-R)$

$$12{,}5R = 42 - 3{,}5R$$
$$12{,}5R + 3{,}5R = 42$$
$$16R = 42 \Rightarrow R = \frac{42}{16} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

Ответ: $2\frac{5}{8}$