Практическое занятие
Тригонометрические уравнения

Цель работы:

1) повторить различные методы решения тригонометрических уравнений;
2) сформировать навыки различать, правильно отбирать способы решения тригонометрических уравнений.

Оборудование: карта индивидуального задания, опорный конспект.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практических заданий.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий.
4. Выбрать метод решения уравнения и решить его.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Пример 1. Решите уравнения: a) $\cos\frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение.

a) Для решения уравнения $\cos\frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ воспользуемся

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos x = a\\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z\end{array}} \quad \text{и} \quad \boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$$

$$\frac{2x}{3} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{2x}{3} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{2x}{3} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{2x}{3} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \quad \Big|\cdot\frac{3}{2}$$

$$x = \pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi n, n \in Z$$

b) Для решения уравнения $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ воспользуемся

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{tg} x = a\\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{array}}$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \quad \Big|\cdot\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$$

Ответ: a) $\pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi n, n \in Z$; b) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.

Пример 2. Решите уравнения a) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg}2x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{tg}2x} = \sqrt{3}$;

b) $\cos 6x \cdot \cos 5x + \sin 6x \cdot \sin 5x = -1$.

Решение.

Для решения уравнений воспользуемся формулами синус, косинус, тангенс суммы и разности аргументов:

$$\boxed{\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y}$$

$$\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

$$\boxed{\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

$$\boxed{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}}$$

a) Для решения уравнения $\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}-\mathrm{tg}2\mathrm{x}}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\mathrm{tg}2x}=\sqrt{3}$ воспользуемся формулой:

$$\boxed{\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{5}-2\mathrm{x}\right)=\sqrt{3}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{tg}\,x=a\\ x=\mathrm{arctg}a+\pi n,\ n\in Z\end{gathered}}$$

$$\frac{\pi}{5}-2x=\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z$$

$$-2x=-\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$$

$$-2x=\frac{2\pi}{15}+\pi n,\ n\in Z\ \left|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$x=-\frac{\pi}{15}-\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$$

b) Для решения уравнения $\cos 6x\cdot\cos 5x+\sin 6x\cdot\sin 5x=-1$ воспользуемся формулой:

$$\boxed{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

$$\cos(6x-5x)=-1$$

$\cos x=-1$ - частный случай

$$x=\pi+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: a) $-\frac{\pi}{15}-\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; b) $\pi+2\pi n, n\in Z$

Пример 3. Решите уравнения:

$$\cos 6x - \cos 3x - 2 = 0$$

Решение.

Воспользуемся формулой двойного аргумента:

$$\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$$

$$2\cos^2 3x - 1 - \cos 3x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 3x - \cos 3x - 3 = 0$$

Замена переменной: $\cos 3x = t,\ \ t \in [-1; 1]$

$$2t^2 - t - 3 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 = 5^2$$

$$t_1 = \frac{1-5}{4} = -1$$

$$t_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} - \text{ не подходит}$$

Вернёмся к переменной x:

$$\cos 3x = -1 - \text{частный случай}$$

$$3x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $\sin 2x + 2\cos^2 x = 4\sin^2 x$.

Решение.

$$\sin 2x + 2\cos^2 x = 4\sin^2 x$$

Воспользуемся формулой двойного аргумента:

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$$

$$2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 4\sin^2 x$$

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 4\sin^2 x = 0$$

Получили однородное тригонометрическое уравнение 2-ой степени.

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 4\sin^2 x = 0 \quad |: \sin^2 x \neq 0$$

$$2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \cdot \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} - 4 \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 0$$

$$2\mathrm{ctg}^2 x + 2\mathrm{ctg} x - 4 = 0$$

Замена переменной: $\mathrm{ctg}\, x = t,\ \ t \in R$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 36 = 6^2$$

$$t_1 = \frac{-2+6}{4} = 1; \quad t_2 = \frac{-2-6}{4} = -2$$

Вернёмся к переменной x:

$\operatorname{ctg} x = 1 -$ частный случай

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{ctg} x = -2$

$x_2 = \operatorname{arcctg}(-2) + \pi k, k \in Z$

$x_2 = \pi - \operatorname{arcctg} 2 + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \quad x_2 = \pi - \operatorname{arcctg} 2 + \pi k, k \in Z$

Пример 5.

а) Решите уравнение, преобразовав сумму в произведение:

$$\cos x + \cos 5x = \cos(\pi + 2x)$$

b) Решите уравнение, преобразовав произведение в сумму или разность:

$$\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \cos 2x$$

Решение.

а) Для решения уравнения $\cos x + \cos 5x = \cos(\pi + 2x)$ в левой части будем использовать формулу $\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$, а в правой части формулы приведения, получим

$$2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-5x}{2} = -\cos 2x$$

$$2\cos 3x \cos(-2x) + \cos 2x = 0$$

$$2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(2\cos 3x + 1) = 0$$

$\cos 2x = 0 -$ частный случай

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

$2\cos 3x + 1 = 0$

$\cos 3x = -\frac{1}{2}$

$3x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z$

$3x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z$

$3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \pi k, k \in Z$

$$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$x_2 = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

b) Для решения уравнения $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \cos 2x$ будем использовать формулу $\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))}$, получим

$$\frac{\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)}{2} = \frac{\sin(6x+2x) + \sin(6x-2x)}{2}$$

$$\sin 8x + \sin 2x = \sin 8x + \sin 4x$$

$$\sin 4x - \sin 2x = 0$$

Далее используем формулу $\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}$, получим

$$2\sin\frac{4x-2x}{2}\cos\frac{4x+2x}{2} = 0$$

$$2\sin x\cos 3x = 0$$

$\sin x = 0 -$ частный случай

$x_1 = \pi n, n \in Z$

$\cos 3x$=0 – частный случай

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

Ответ: a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; $x_2 = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

b) $x_1 = \pi n, n \in Z$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

Пример 6. Решите уравнение, используя метод разложения на множители:

$$\cos^2 x - 7\sin x + \sin x\cos x - 7\cos x = 0$$

Решение.

$$(\cos^2 x + \sin x\cos x) - 7(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\cos x(\cos x + \sin x) - 7(\sin x + \cos x) = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - 7) = 0$$

$\sin x + \cos x = 0$ - однородное тригонометрическое уравнение первой степени

$\cos x$=7 – нет решений

$\sin x + \cos x = 0 \ \ |: \cos x \neq 0$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos x} = 0$

$\mathrm{tg}x + 1 = 0$

$\mathrm{tg}x = -1$ - частный случай

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Пример 7. Решите уравнение, путём понижения степени:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

Решение.

Используем формулы понижения степени:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2 \quad |\cdot 2$$

$$1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x = 4$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

$$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$$

$$2\cos 5x \cos 3x + 2\cos 5x \cos x = 0$$

$$\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$$

$$2\cos 5x \cos 2x \cos x = 0$$

$2\cos 5x = 0$

$\cos 5\mathrm{x} = 0$ - частный случай

$5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n_1, n_1 \in Z$

$x_1 = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n_1}{5}, n_1 = Z$

$\cos 2x$=0 – частный случай

$2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n_2, n_2 \in Z$

$x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n_2}{2}, n_2 = Z$

$\cos x$=0 – частный случай

$x_3 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n_3, n_3 \in Z$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n_1}{5}, n_1 = Z$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n_2}{2}, n_2 = Z$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n_3, n_3 \in Z$

Контрольные вопросы

1) Какое уравнение называется тригонометрическим?
2) Назовите решения уравнений cos$x$=a, sin$x$=a, tg$x$=a, ctg$x$=a. Как называются данные уравнения?
3) Найдите arcos(-x), arcsin(-x), arctg(-x), arcctg(-x).
4) Какие методы используются при решении тригонометрических уравнений?
5) Не решая уравнений, определите методы их решения:
   a) $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$
   b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$
   c) $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$
   d) $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$
   e) $2\mathrm{tg}x - 2 = 2\mathrm{tg}x$
   f) $2\sin^2 x + \sin 2x = 3$

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1	**Вариант 2**
Решите уравнения: 1) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$ 2) $\frac{\text{tg}4x+\text{tg}6x}{1-\text{tg}4x\cdot\text{tg}6x}=1$ 3) $\cos 2x-\cos x-\sin^2 x=0$ 4) $4sin^2x+7cos^2x+3sin2x-6cos2x=1$ 5) $\cos 2x+\cos(\pi+6x)=0$ 6) $\cos x\cdot\sin x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$ 7) $\cos^4 x+\sin^4 x=\sin x\cdot\cos x$	Решите уравнения: 1) $\sqrt{3}\text{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)=-1$ 2) $\cos 2x\cdot\cos 9x-\sin 2x\cdot\sin 9x=-\frac{1}{2}$ 3) $\cos 2x-\sin x+\cos^2 x=0$ 4) $8\cos^2 x-7\sin 2x=5$ 5) $\sin 2x\cdot\cos 2x-\sin x\cdot\cos x=0$ 6) $2\cos x\cdot\text{tg}x+1-2\cos x-\text{tg}x=0$ 7) $\cos^4 x+\sin^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$

Вариант 3	**Вариант 4**
Решите уравнения: 1) $2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x=1$ 3) $3\cos 6x+5\sin 3x=-1$ 4) $3\sin^2 x+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-5\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=0$ 5) $\cos 2x+\cos x+\cos 3x=0$ 6) $\mathrm{tg}x\cdot\sin x-\sin^2 x-\mathrm{tg}x+\sin x=0$ 7) $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$	Решите уравнения: 1) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x=-1$ 3) $\cos 2x+\cos x+1=0$ 4) $4\cos^2 x+\sin 2x=1$ 5) $\cos 3x\cdot\cos x=\cos 7x\cdot\cos 5x$ 6) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$ 7) $4-6\cos x=2\sin^2 x-2\sin^2\frac{x}{2}$

Вариант 5	Вариант 6
Решите уравнения: 1) $-\sqrt{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ 2) $\frac{\mathrm{tg}5x+\mathrm{tg}3x}{1-\mathrm{tg}5x\cdot\mathrm{tg}3x}=-1$ 3) $\mathrm{tg}x-6\mathrm{ctg}x-1=0$ 4) $3\sin^2 x+5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin 2x=2$ 5) $\sin 6x\cdot\cos 2x=\sin 5x\cdot\cos 3x$ 6) $1+\sin 2x\cdot\cos x-\sin 2x-\cos x=0$ 7) $\cos^4 x+\sin^4 x=\frac{3}{4}$	Решите уравнения: 1) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ 2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $5+4\cos x=\cos 2x$ 4) $\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x=0$ 5) $\cos 3x-\cos x=0$ 6) $\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$ 7) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 3x=2$

Вариант 7	Вариант 8
Решите уравнения: 1) $3\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ 2) $\cos 6x \cdot \cos 4x + \sin 6x \cdot \sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$ 4) $6 - 10\cos^2 x + 4\cos 2x = 2\sin 2x$ 5) $\cos 2x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \sin x$ 6) $4 \cdot \sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$ 7) $\sin^2 3x + \sin^2 4x - \sin^2 5x - \sin^2 6x = 0$	Решите уравнения: 1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ 2) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin x = 1$ 3) $2\cos^2 x - 7\cos x = 2\sin^2 x$ 4) $\frac{3}{2}\sin 2x = 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 5) $\cos 3x + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = 0$ 6) $\cos x - \sin x = \cos 2x$ 7) $4 \cdot \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$

Вариант 9	Вариант 10
Решите уравнения: 1) $2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$ 2) $\sin 3x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}$ 3) $2\cos 2x+4\cos x+2=\sin^2 x$ 4) $5\sin^2 x+5\sin x\cdot\cos x=3$ 5) $\sin x-\sin 2x=\cos 2x-\cos x$ 6) $\cos^2 x-0{,}5\sin 2x=0$ 7) $6\cdot\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$	Решите уравнения: 1) $3\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ 2) $\cos 4x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin 4x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{2}$ 3) $\cos 2x+3\sqrt{2}\cdot\sin x-3=0$ 4) $4\sin 2x-3\cos 2x=3$ 5) $\sin 4x\cdot\cos x=\sin 3x\cdot\cos 2x$ 6) $\cos^2\frac{5x}{3}-\cos\frac{5x}{3}\cdot\cos\frac{4x}{3}=0$ 7) $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=1{,}5$

Вариант 11	Вариант 12
Решите уравнения: 1) $\sqrt{3}\text{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$ 2) $\frac{\text{tg}3x+\text{tg}x}{1-\text{tg}3x\cdot\text{tg}x}=\sqrt{3}$ 3) $tgx-6ctgx+5=0$ 4) $4sin^2x+9sin2x=-5$ 5) $cos\left(\frac{3}{2}\pi+5x\right)-sinx=2\cdot cos3x$ 6) $\sqrt{2}\cos x-\sin 2x=0$ 7) $\cos^4 x+\sin^4 x=\frac{5}{8}$	Решите уравнения: 1) $4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{12}=0$ 2) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x+\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x=-\frac{1}{2}$ 3) $1-\sin x=\cos 2x$ 4) $2\cos^2 x-\sin 2x+4\sin^2 x=2$ 5) $\cos 3x-\cos 5x=\sin 4x$ 6) $2\sin^3 x-3\sin x\cdot\cos x=0$ 7) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$