Молодечненский государственный политехнический техникум

Инструкция к практическому занятию: Показательные неравенства.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать некоторые приёмы решения показательных неравенств.

2) Научиться приводить показательные неравенства к известным алгебраическим неравенствам, используя свойства степеней, свойства показательной функции и алгебраические преобразования.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить неравенства.
5. Оформить отчёт.
6. Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

Показательным неравенством называется неравенство, содержащее переменную в показателях степеней при некоторых постоянных основаниях.

При решении показательных неравенств полезно помнить, что показательная функция является монотонной и

1) если основание **a>1**, то функция $y = a^x$ возрастающая (большему x соответствует больший y);
2) если **0<a<1**, то функция $y = a^x$ убывающая (большему x соответствует меньший y).

Указания к выполнению практической работы

При выполнении работы, используйте рассмотренные ниже способы решения показательных неравенств.

<u>1 способ</u>. Способ приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

а) привести обе части неравенства к одному основанию, т. е. привести неравенство к виду:

$$\boxed{a^{f(x)} < a^{g(x)}},\ \text{тогда}$$

b) если **a>1**, то **f(x)<g(x)** (знак неравенства <u>сохраняется</u>);
если **0<a<1**, то **f(x)>g(x)** (знак неравенства <u>меняется</u> на противоположный).

При решении неравенств можно пользоваться формулами:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	7) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	5) $a^0 = 1$	8) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	6) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	

Пример 1. $4^x > 2^{x-1}$

Решение. Приведём неравенство к нужному виду. Для этого у степеней должно быть одно основание 2.

$2^{2x} > 2^{x-1}$

Т. к. основание степени a=2>1, то 2x>x-1

x>-1

Ответ: $x \in (-1; +\infty)$

Пример 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > (0{,}25)^{\frac{x^2-2}{2}}$

Решение. Приведём степени к одному основанию.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x^2-2}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}$$

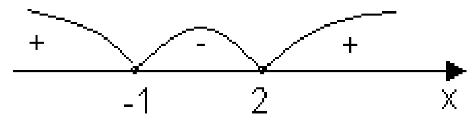
Т. к. основание $a = \frac{1}{2}$, $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$, то при сравнении показателей этих степеней необходимо поменять знак неравенства (из двух степеней с одним основанием ½ большей считается та степень, у которой показатель меньший):

$x < x^2 - 2; \qquad x - x^2 + 2 < 0;$

$x^2 - x - 2 > 0;$

$x_1 = -1; x_2 = 2;$

$(x-2)(x+1) > 0$



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Пример 3. $3^{\frac{6x+3}{x^2}} \geq \sqrt[4]{27^{\frac{2x+1}{x}}}$

Решение. Приведём степени к одному основанию 3.

$3^{\frac{6x+3}{x^2}} \geq \left(3^{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{3}{4}};$

$a = 3 > 1$ (знак неравенства сохраняется)

$\frac{6x+3}{x^2} \geq \frac{6x+3}{4x}$

Перенесём слагаемое из правой части в левую, приведём дроби к общему знаменателю:

$\frac{4 \cdot (6x+3) - x(6x+3)}{4x^2} \geq 0$

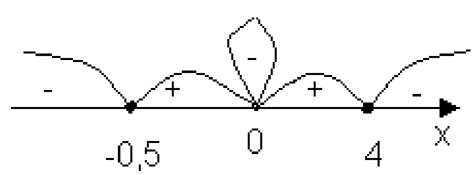
$\frac{(6x+3)(4-x)}{4x^2} \geq 0$

Решим неравенство методом интервалов. Для этого на числовую прямую нанесём точки, в которых дробь равна нулю или не существует:

$x = -\frac{1}{2};$

$x = 4;$

$x \neq 0$



Ответ: $[-0{,}5; 0) \cup (0; 4]$

Пример 4. $4^{x+2} - 3 \cdot 4^{x-1} < 122$

Решение. Применим формулу 1 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, тогда неравенство примет вид:

$4^x \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^x \cdot 4^{-1} < 122;$

$4^x \cdot 16 - \frac{3}{4} \cdot 4^x < 122$

Вынесем неизвестную степень 4^x за скобки и разделим неравенство на число, получившееся в скобках.

$$4^x \cdot \left(16 - \frac{3}{4}\right) < 122;$$

$$4^x \cdot \frac{61}{4} < 122; \quad 4^x < 122 \cdot \frac{4}{61};$$

$$4^x < 8; \quad 2^{2x} < 2^3;$$

$$2x < 3; \quad x < \frac{3}{2}$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1{,}5)$

<u>2 способ</u>. Способ введения новой переменной.

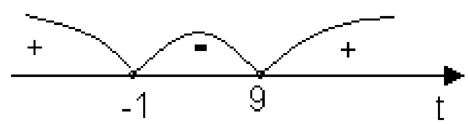
Пример. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$

Решение. $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$; $(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$. Заменим $\underline{3^x = t}$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 8t - 9 < 0;$$

$$t_1 = -1; \quad t_2 = 9;$$

$$(t + 1) \cdot (t - 9) < 0$$



$t \in (-1; 9)$ или $-1 < t < 9$

$-1 < 3^x < 9$

$$\begin{cases} 3^x > -1 \\ 3^x < 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x < 2 \end{cases}$$

$x \in (-\infty; 2)$

Ответ: $x \in (-\infty; 2)$

Контрольные вопросы:

1) Какое неравенство называется показательным?
2) О каком свойстве показательной функции полезно помнить при решении показательных неравенств?
3) Приёмы решения показательных неравенств?