Инструкция для выполнения домашней контрольной работы №4 по теме «Производная и ее применение»

№1 . Найти скорость и ускорение тела при t_0 =1, которое движется по закону $S = 2t^3 + 5t^2 + 3t + 12$

Решение

Последовательно найдем первую и вторую производные

$S' = 6t^2 + 10t + 3$ $\qquad$ $S'' = 12t + 10$

Подставим t_0 =1 и найдем скорость $v = S'(1) = 6 * 1^2 + 10 * 1 + 3 = 19$ и ускорение а= $S''(1) = 12 * 1 + 10 = 22$

Ответ: *19 м/с, 22 м/с*^{2}

№2. Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Решение

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение **3х-5**, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также замечаем, что здесь невозможно применить правила дифференцирования суммы и разности, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$$

В данном функция $y = sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем многочлен **(3х-5)** является внутренней функцией (вложением), а **sin(3x-5)**– внешней функцией.

Применяем правило дифференцирования сложной функции

$$y' = f'(U) \cdot U', \quad \text{где } U=g(x)$$

Получаем:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

Ответ: 3cos*(3x-5)*

№3. Найти критические точки функции $y=3x^5 - 5x^3 + 2$

Решение

Для того чтобы найти критические точки, нужно:

1) Найти область определения D(y) заданной функции y(x);

2) Вычислить первую производную заданной функции;

3) Отыскать все решения уравнения y'(x)=0. Выбрать из этих решений только те значения, которые попадают в область определения D(y) функции y(x). Эти точки так же будут являться критическими точками функции y(x).

Для нашей функции имеем:

f '(x)= $15x^4 - 15x^2 = 15x^2 (x^2-1)$

f '(x) = 0, если $15x^2(x^2-1)=0$

$15x^2=0$ или $x-1=0$ или $x+1=0$

x = 0 или x = 1 или x = -1.

Ответ: *x = 0 x = 1 x = -1 –критические точки.*

№4 Найти экстремумы функции $y = -\frac{1}{3}\mathbf{x^3} + \mathbf{3x^2} - \mathbf{5x} - \mathbf{1}$

<u>Решение</u>

1) Область определения функции: x∊R

2) Найдем критические точки. Для этого следует найти производную и решить уравнение y'(x) = 0 :

$$y' = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3} + \mathbf{3x^2} - \mathbf{5x} - \mathbf{1}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 = -x^2 + 6x - 5$$

Получилось обычное **<u>квадратное уравнение</u>**:

$$y' = -x^2 + 6x - 5 = 0$$

D=36-20=16>0

$$x_1 = \frac{-6+4}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-6-4}{-2} = 5$$

Значит, $x_1=1$, $x_2=5$ – критические точки

3) Используем **первое достаточное условие экстремума:**

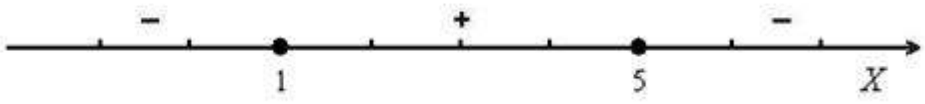
– **если при переходе через точку** x_0 **производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в данной точке функция достигает максимума**;

– **если при переходе через точку** x_0 **производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в данной точке функция достигает минимума**.

Далее на числовой прямой нужно отложить критические точки и определить знаки производной на интервалах, которые <u>входят в область определения функции</u>.

Для расстановки знаков применяем *метод интервалов*. Перед нами парабола **f'(x)=-x²+6x-5**, ветви которой направлены вниз.

В результате получены следующие знаки производной:



На интервалах (-∞;1), (5;+∞) производная отрицательна, значит, САМА ФУНКЦИЯ $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1}$ на данных интервалах **убывает**. На среднем интервале f '(x)>0, значит, функция **возрастает** на (1;5).

При переходе через точку $x_0=1$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция достигает **минимума**:

$$f(1) = -\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1 - 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

При переходе же через точку $x_0=5$ производная меняет знак с «+» на «–», и функция достигает **максимума** в данной точке:

$$f(5) = -\frac{1}{3}\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 - 5\cdot 5 - 1 = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - 1 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Ответ: *функция возрастает на интервале (1;5) и убывает на интервалах (-∞;1), (5;+∞). В точке x=1 функция достигает минимума: f(1)=*$-3\frac{1}{3}$*, а в точке x=5 – максимума: f(5)=*$7\frac{1}{3}$

№5 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $\boldsymbol{y = \frac{-2x^4}{3} + 4x^2 + 1}$

<u>Решение</u>:

1) Функция определена и непрерывна на ***R****.*

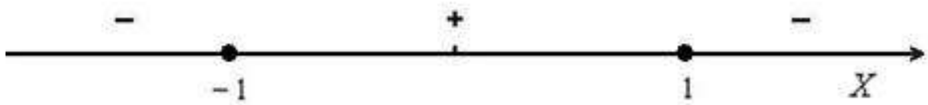
2) Найдём критические точки второй производной:

$$f'(x) = \left(1 + 4x^2 - \frac{2x^4}{3}\right)' = 8x - \frac{8x^3}{3}$$

$$f''(x) = \left(8x - \frac{8x^3}{3}\right)' = 8 - 8x^2 = 8(1 - x^2) = 0$$

$x = -1, x = 1$ *– критические точки*

3) Определим знаки второй производной на полученных интервалах:



В точках $x = \pm 1$ *существуют перегибы графика (так как меняется знак при переходе через эти точки).*

$f(\pm 1) = 1 + 4 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

Ответ: *график функции* y= $\frac{-2x^4}{3} + 4x^2 + 1$ *является вогнутым на интервале* *(-1;1) и выпуклым на* (-∞;-1)U(1;+∞), *точки перегиба: (-1;*$\frac{13}{3}$*)* , (1;$\frac{13}{3}$).

№6 Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ох, если она проведена к кривой y= (x^3 + 15х +26) в точке х=-2

Решение

Найдем производную первого порядка от заданной функции y'(x):

y'(x) = ($3x^2$ + 15).

Подставим заданное значение аргумента х=-2 в производную функции и вычислим ее значение:

y'(-2) = ($3(-2)^2$ + 15) = 27.

Таким образом, мы нашли tg a = 27

Ответ: *tg a = 27*

№7 Вычислить производные функций:

а) $\boldsymbol{y = 6 + x + 3x^2 - \sin x + 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx}$

Решение

$$y' = \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx\right)' =$$

$$= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - (11ctgx)' =$$

$$= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - 11(ctgx)' =$$

$$= 0 + 1 + 3 \cdot 2x - \cos x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + (-2) \cdot x^{-3} - 11 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$$

b) $y=\dfrac{x^4-3x^2+6}{x^4-x^2-12}$

Решение

$$y'=\frac{(x^4-3x^2+6)'(x^4-x^2-12)-(x^4-3x^2+6)(x^4-x^2-12)'}{(x^4-x^2-12)^2}=$$

$$=\frac{(4x^3-6x)(x^4-x^2-12)-(x^4-3x^2+6)(4x^3-2x)}{(x^4-x^2-12)^2}=$$

$$\frac{4x^7-4x^5-48x^3-6x^5+6x^3+72x-4x^7+2x^5+12x^5-6x^3-24x^3+12x}{(x^4-x^2-12)^2}=$$

$$\frac{4x^5-72x^3+84x}{(x^4-x^2-12)^2}$$

c) $\boldsymbol{y=(2^x+3\sin x)(x^4-5x)}$

Решение

$$y'=(2^x+3\sin x)'(x^4-5x)+(2^x+3\sin x)(x^4-5x)'$$
$$=(2^x ln2+3\cos x)(x^4-5x)+(2^x+3\sin x)(4x^3-5)$$

d) $\boldsymbol{y=\sqrt{e^x}\ln(\sin x)}$

Решение

Перепишем исходную функцию в виде $y=e^{\frac{x}{2}}\ln(\sin x)$. Тогда имеем

$$y=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'\cdot\ln(\sin x)+e^{\frac{x}{2}}\cdot(\ln(\sin x))'=e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'\cdot\ln(\sin x)+e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'$$
$$=e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(\sin x)+e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\cos x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\ln(\sin x)+e^{\frac{x}{2}}ctgx$$

№8 Для функции $\boldsymbol{f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}}$ ***найти***

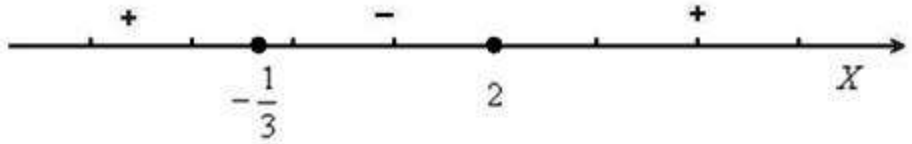
1) значение функции в точке максимума
2) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[1;4]$
3) интервалы возрастания функции

Решение:

1) Найдём критические точки:

$$f'(x)=\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)'=3x^2-5x-2=0$$

Данное уравнение имеет два действительных корня x=-$\frac{1}{3}$ и x=2. Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



Следовательно, функция возрастает на (-∞;-$\frac{1}{3}$) ∪ (2; +∞) и убывает на (-$\frac{1}{3}$; 2) .

В точке x=$-\frac{1}{3}$ функция достигает максимума: $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{50}{27}\approx 1{,}85$

2) Вычислим значения функции на концах отрезка

$$y(1)=1-\frac{5}{2}-2+\frac{3}{2}=\mathbf{-2}$$

$$y(4)=64-40-8+\frac{3}{2}=\mathbf{17{,}5}$$

Добавим значение функции в критической точке x=2: y(2)=**- 4,5**

Значение функции в точке максимума $x=-\frac{1}{3}$ не учитываем т.к. $x=-\frac{1}{3}\notin[1;4]$.

Значит, на указанном отрезке функция принимает наибольшее значение в точке x=4 и наименьшее в точке x=2.

3) Интервалы возрастания были найдены в п.1)

№ 9 Исследовать функцию и построить график.

$$f(x)=x^3-\frac{x^4}{4}$$

Решение: Проведём исследование функции:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, *D(y)=R*.

$$f(-x)=(-x)^3-\frac{(-x)^4}{4}=-x^3-\frac{x^4}{4}$$

$$f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq -f(x),$$

Значит, данная функция не является четной или нечетной.
Функция непериодическая.

2) Точки пересечения графика с координатными осями

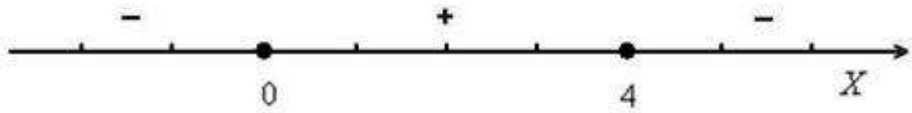
$$OX: f(x)=x^3-\frac{x^4}{4}=x^3\cdot\left(1-\frac{x}{4}\right)=0$$

$$x=0,\ x=4$$

Значит график проходит через точки (0;0) и (4;0)

3) Интервалы знакопостоянства функции

Определим знаки $f(x)$:



$f(x) > 0$, если $x \in (0; 4)$,

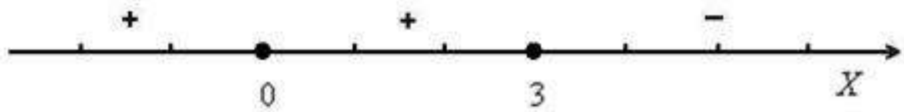
$f(x) < 0$, если $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)' = 3x^2 - x^3 = x^2(3 - x) = 0$$

$x = 0,\ x = 3$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$ и убывает на $(3; +\infty)$.

В точке $x = 3$ функция достигает максимума: $f(3) = 27 - \frac{81}{4} = 6\frac{3}{4}$

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x) = 0$$

$x = 0,\ x = 2$ – критические точки.

Определим знаки $f''(x)$:

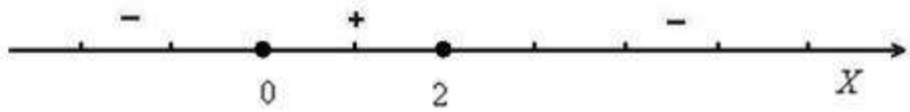


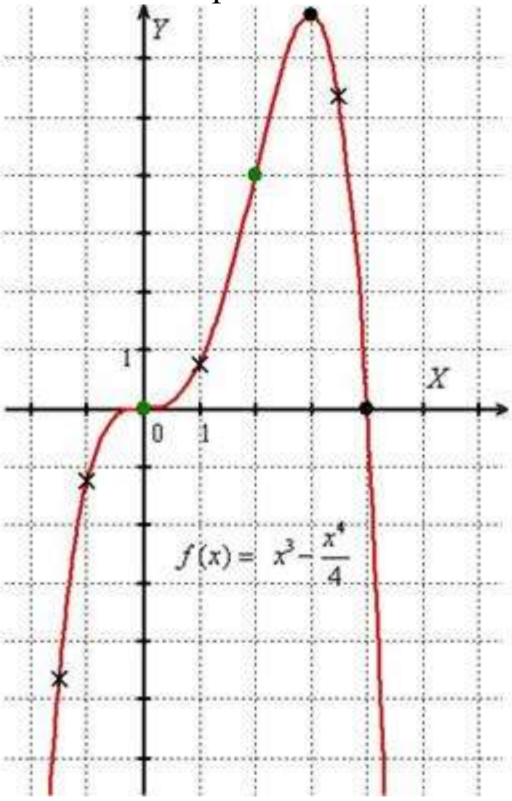
График функции является выпуклым на $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и вогнутым на $(0; 2)$.
В обеих критических точках существуют перегибы графика.

$f(0) = 0, \quad f(2) = 8 - 4 = 4$

6) Найдем дополнительные точки:

x	$-1{,}5$	-1	1	$3{,}5$	$4{,}5$
$f(x)$	$-4{,}6$	$-1{,}3$	$0{,}7$	$5{,}4$	$-11{,}4$

Выполним чертёж:



Варианты для выполнения домашней контрольной работы

Вариант 1	**Вариант 2**
Задания на 2 балла	***Задания на 2 балла***
№1. Найти скорость и ускорение тела при t=4, которое движется по закону $s = \frac{7}{5}t^5 - 6t^3 + 4t + 10$	№1. Найти скорость и ускорение тела при t=2, которое движется по закону $s = \frac{7}{6}t^6 - 3t^4 + 5t^2 + 4$
№ 2. Найти производную функции $y = ctg5x$	№ 2. Найти производную функции $y = tg16x$
№ 3. Найти критические точки функции $y = x^5 - 5x^3$	№ 3. Найти критические точки функции $y = x^5 - \frac{20}{3}x^3$
№4. Количество точек экстремума $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$	№4. Количество точек экстремума $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{9}{3}x^3$
№ 5. Найти точки перегиба функции: $y = x^3 - 5x$	№ 5. Найти точки перегиба функции: $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x$
№6. Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ох, если она проведена к кривой $y = 5x^3 - 7x^2$ в точке $x_0 = 1$ Какой угол она образует с осью Ох?	№ 6. Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ох, если она проведена к кривой $y = 4x^3 - 6{,}5x^2$ в точке $x_0 = 1$ Какой угол она образует с осью Ох?
Задания на 4-5 балла	***Задания на 4-5 балла***
Вычислить производные функций	Вычислить производные функций
№ 1. $y = 25lnx - \frac{17}{x} + \sqrt[20]{x^3} + \frac{6}{x^{12}}$	№ 1. $y = 2arcsinx - \frac{21}{x} + \sqrt[13]{x^9} + \frac{7}{x^8}$
№ 2. $y = \frac{x^4 - 7x^3 + 2}{x^4 + x^3 - 3}$	№ 2. $y = \frac{x^3 - 9x^2 + 4}{2x^3 + x^3 - 5}$
№ 3 $y = (15^x + 4cosx) \cdot (x^3 + 3)$.	№ 3. $y = (5^x - sinx) \cdot (x^5 + 3x - 7)$
№4. $y = \sqrt[5]{lnx} \cdot cos(x^3 - 5x) + e^{4x}$	№4. $y = \sqrt[5]{sin6x} \cdot ln(x^3 + 9x) + 20^{tg4x}$
Задания на 6-10 баллов	***Задания на 6-10 баллов***
Для функции $y = x^2 + \frac{2}{x}$ найти: 1) Значение функции в точке минимума 2) Наибольшее значение на отрезке $\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$ 3) Интервалы возрастания функции	Для функции $y = \frac{2x^2 + 6}{x - 1}$ найти: 1) Значение функции в точке максимума 2) Наибольшее значение на отрезке $[2; 5]$ Интервалы возрастания функции
Построить график функции $y = 6x^2 - x^3$	Построить график функции $y = 2x^2 - x^4 + 8$
Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается правильным треугольником. Периметр окна равен 3 м. Каково должно быть основание прямоугольника, чтобы окно имело наибольшую площадь? Ответ. $\frac{3}{6 - \sqrt{3}}$	В равнобедренный треугольник с основанием 15 см и высотой 9 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти размеры прямоугольника. Ответ. 4,5 и 7,5

Вариант 3	Вариант 4
Задания на 2 балла	***Задания на 2 балла***
№1. Найти скорость и ускорение тела при t=3 с, которое движется по закону $s = t^4 - 2t^2 + 9$ (м)	№1. Найти скорость и ускорение тела при t=2 с, которое движется по закону $s = t^6 - 4t^4 + 4$ (м)
№ 2. Найти производную функции $y = \cos(3x + 8)$	№ 2. Найти производную функции $y = arctg4x$
№ 3. Найти критические точки функции $y = \frac{1}{4}x^4 - 9x^3$	№ 3. Найти критические точки функции $y = \frac{1}{6}x^6 - x^4 + 12 = 0$
№4. Количество точек экстремума $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$	№4. Количество точек экстремума $y = 2x^3 + x^2 - 8x - 7$
№ 5. Найти точки перегиба функции: $y = x^3 - 3x^2 + 2$	№ 5. Найти точки перегиба функции: $y = -x^3 + 6x^2 - 5$
№6. Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ох, если она проведена к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$ в точке $x_0 = 1$ Какой угол она образует с осью Ох?	№ 6. Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ох, если она проведена к кривой $y = -7x^3 + 10x^2 + x - 12$ в точке $x_0 = 0$ Какой угол она образует с осью Ох?
Задания на 4-5 балла	***Задания на 4-5 балла***
Вычислить производные функций	Вычислить производные функций
№ 1. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^{16}}$	№ 1. $y = 2 \cdot ctgx - \frac{2}{x} + \sqrt[14]{x^7} + \frac{6}{x^{18}}$
№ 2. $y = \frac{x^4+5x^3+3}{x^4-\frac{1}{2}x^3-6}$	№ 2. $y = \frac{x^3-7x^2+6}{2x^3+2x^3-15}$
№ 3 $y = (x^5 + 3x^2 + 9) \cdot \cos x.$	№ 3. $y = y = \left(\frac{1}{3}x^{3} + 3\sqrt{x}\right) \cdot \ln x$
№4. $y = \sqrt[5]{sinx} \cdot ln(x^3 - 5x) + 2^{4x}$	№4. $y = \sqrt[5]{log_3 6x} \cdot cos(x^3 - 3x) + 4^{ctg4x}$
Задания на 6-10 баллов	***Задания на 6-10 баллов***
Для функции $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$ найти: 1) Значение функции в точке максимума 2) Наибольшее значение на отрезке $[0; 4]$ 3) Интервалы возрастания функции	Для функции $y = -x^5 + 5x$ найти: 1) Значение функции в точке минимума 2) Наибольшее значение на отрезке $[-2; 0]$ 3) Интервалы убывания функции
Построить график функции $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$	Построить график функции $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$
В зоопарке куском верёвки длиной 100 м огораживают загон для зверей, имеющий форму равнобедренного треугольника, основанием которого служит стена павильона. Каким следует выбрать основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей? Ответ. $50\sqrt{2}$	Найти радиус круга, в который можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см. Ответ. $7\sqrt{2}$