Учреждение образования «Молодечненский государственный политехнический колледж»

Разработчик: Кочеткова И.А.

Инструкция к практическому занятию:
«Обратные тригонометрические функции»

Цель работы:
1. Научиться преобразовывать выражения, содержащие обратные тригонометрические функции.
2. Закрепить свойства обратных тригонометрических функций.
3. Повторить формулы приведения, решение систем неравенств и решение неравенств методом интервалов.

Оборудование: карта индивидуальных заданий, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на **контрольные вопросы**:
   а) Какая функция называется обратной? Каковы свойства взаимно обратных функций?
   б) Что называется арксинусом числа x? Каким должно быть число x? Каковы свойства функции $y = \arcsin x$?
   в) Что называется арккосинусом числа x? Каким должно быть число x? Каковы свойства функции $y = \arccos x$?
   г) Что называется арктангенсом числа x? Каким должно быть число x? Каковы свойства функции $y = \mathrm{arctg} x$?
   д) Что называется арккотангенсом числа x? Каким должно быть число x? Каковы свойства функции $y = \mathrm{arcctg} x$?.

3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.

4. Выполнить задания.

5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практических заданий:

Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, требует знаний свойств этих функций и некоторых формул (*смотри приложение к инструкции*).

Пример 1. Имеет ли смысл выражение $\arccos\sqrt{2}$. Ответ обоснуйте.
Решение. Известно, что функция $\arccos x$ имеет значения, если $x \in [-1;1]$, а $\sqrt{2} > 1$. Следовательно, выражение $\arccos\sqrt{2}$ смысла не имеет.

Пример 2. Вычислить: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}1$.
Решение. Вычислим значение выражения с использованием таблицы значений обратных тригонометрических функций:

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi + 2\pi - 4\pi + 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 3. Вычислить: $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right)$.
Решение. Используем свойства обратных тригонометрических функций и формулы приведения:

$$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right) = \cos\left(-\arcsin\frac{1}{2} + 3\cdot\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + \left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 3\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 3\pi - \pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \underset{\text{II четв., знак "-"}}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Пример 4. Вычислить: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Введём обозначения $\arccos\left(-\frac{3}{3}\right) = \alpha$, тогда по определению $\arccos x$ $\alpha \in [0;\pi]$ и

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

По условию необходимо найти $\sin\alpha$.

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$;

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. Так как $\alpha \in \mathrm{I}, \mathrm{II}$ четв., следовательно, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Пример 5. Найти область определения функции: $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$.

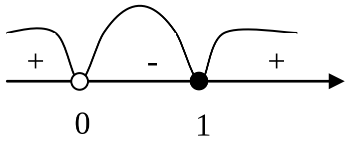
Решение. Зная, что область определения функции арксинус – отрезок [-1;1], то можно записать:

$\frac{1}{x} \in [-1;1]$ или $-1 \le \frac{1}{x} \le 1$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \le 1, \\ \frac{1}{x} \ge -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 \le 0, \\ \frac{1}{x} + 1 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1-x}{x} \le 0, \\ \frac{1+x}{x} \ge 0. \end{cases}$$

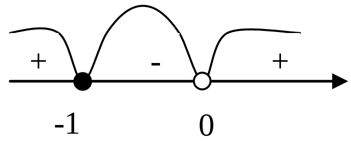
Решаем каждое неравенство системы методом интервалов. Для этого на числовую прямую наносим точки: x=1, x≠0 для первого неравенства и x=-1, x≠0 для второго неравенства:

$\frac{x-1}{x} \ge 0$



$x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

$\frac{1+x}{x} \ge 0$



$x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$

Теперь найдём общее решение системы:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty] \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Приложение к инструкции

1) $\boldsymbol{y}$**=arcsin**$\boldsymbol{x}$

$x \in [-1;1]$

$y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

arcsin(-x)=-arcsin$x$ (нечётная)

возрастает

sin(arcsinx)=x, $x \in [-1;1]$

arcsin(sinx)=x, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2) $\boldsymbol{y}$**=arccos**$\boldsymbol{x}$

$x \in [-1;1]$

$y \in 0;\pi$

arccos(-x)=π-arccos$x$

убывает

cos(arccos$x$)=x, $x \in [-1;1]$

arccos(cosx)=x, $x \in 0;\pi$

3) $\boldsymbol{y}$**=arctg**$\boldsymbol{x}$

$x \in$R

$y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

arctg(-x)=-arctg$x$ (нечётная)

возрастает

tg(arctg$x$)=x, $x \in [-1;1]$

arctg(tg$x$)=x, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4) $\boldsymbol{y}$**=arcctg**$\boldsymbol{x}$

$x \in$R

$y \in (0;\pi)$

arcctg(-x)=π-arctg$x$

убывает

ctg(arcctg$x$)=x, $x \in [-1;1]$

arcctg(ctg$x$)=x, $x \in (0;\pi)$

Таблица значений обратных тригонометрических функций

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsinx	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
arccosx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	
arctgx	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctgx	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$