Молодечненский государственный политехнический техникум

Инструкция к практическому занятию:

Решение однородных тригонометрических уравнений

Разработчик: ***И. А. Кочеткова, Ж. И. Тимошко***

Цель работы:

1) Повторить решение квадратных и линейных уравнений;
2) Повторить тригонометрические формулы двойного аргумента;
3) Повторить определения обратных тригонометрических функций и их свойства;
4) Закрепить умения решать простейшие тригонометрические уравнения;
5) Закрепить основные методы решения тригонометрических уравнений (введение новой переменной, разложения на множители способом вынесения за скобки и способ деления).

Оборудование: карта индивидуального задания,
микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы:
   - **2.1.** Какие уравнения называются простейшими тригонометрическими? Как они решаются?
   - **2.2.** При каких а имеют решения уравнения $\boldsymbol{sinx = a}$ и $\boldsymbol{cosx = a}$?
   - **2.3.** Что значит частные случаи и когда они применяются?
   - **2.4.** Назовите основной метод решения однородных тригонометрических уравнений
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить примеры.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Теория

Опр. ***Однородным*** называется такое тригонометрическое уравнение, левая часть которого есть однородный многочлен относительно sinx и cosx, а правая часть –ноль.

Однородное уравнение – это уравнение вида:

$A \cdot \sin x + B \cdot \cos x = 0$	однородное уравнение 1- ой степени;
$A \cdot \sin^2 x + B \cdot \sin x \cdot \cos x + C \cdot \cos^2 x = 0$	однородное уравнение 2- ой степени.

Левую и правую части однородного уравнения нужно разделить на наибольшую степень **cosx** и ввести подстановку $\boldsymbol{tgx = t}$, где $\boldsymbol{t \in R}$. Тогда относительно t получится линейное уравнение (в 1-ом случае) или квадратное уравнение (во 2-м случае).

Чтобы привести тригонометрическое уравнение к однородному уравнению часто следует применять формулы двойного аргумента: $\boxed{\boldsymbol{sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha}}$ и $\boxed{\boldsymbol{cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha}}$, а также тождество $\boxed{\boldsymbol{D = D \cdot (cos^2\alpha + sin^2\alpha)}}$, где D – некоторое действительное число.

При решении практических заданий используйте таблицы:

Таблица1

Таблица значений обратных тригонометрических функций

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsinx	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
arccosx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	
arctgx	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctgx	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

и свойства:

$$\boldsymbol{arcsin(-x) = -arcsinx}$$
$$\boldsymbol{arccos(-x) = \pi - arccosx}$$
$$\boldsymbol{arctg(-x) = -arctgx}$$
$$\boldsymbol{arcctg(-x) = \pi - arcctgx}$$

Таблица 2.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение	Частные случаи		
		a=-1	**a=0**	**a=1**
$\sin x = a, \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a, \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$
$tgx = a, a \in R$	$x = arctga + \pi k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
$ctgx = a, a \in R$	$x = arcctga + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Рассмотрим решения нескольких примеров.

<u>Пример 1</u>. $\boldsymbol{6cos^2x - \sqrt{3}sin2x = 0}$

Для решения этого уравнения, необходимо применить формулу $\boxed{\boldsymbol{sin2x = 2sinx \cdot cosx}}$

$$6cos^2x - 2\sqrt{3}sinx \cdot cosx = 0$$

Используем метод вынесения общего множителя за скобки:

$$cosx \cdot \left(6cosx - 2\sqrt{3}sinx\right) = 0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, поэтому:

$$cosx = 0 \quad \text{или} \quad 6cosx - 2\sqrt{3}sinx = 0$$

Получили два уравнения, одно из них простейшее, а второе однородное уравнение 1-ой степени. Решаем их с помощью таблицы «Решение простейших тригонометрических уравнений» и указанных в теории преобразований (способом деления):

$$cosx = 0$$

Частный случай a=0:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$6cosx - 2\sqrt{3}sinx = 0$$

Это однородное уравнение 1-ой степени, разделим его на $cosx \neq 0$:

$$6\frac{cosx}{cosx} - 2\sqrt{3}\frac{sinx}{cosx} = 0$$

$$6 - 2\sqrt{3}tgx = 0$$

$$-2\sqrt{3}tgx = -6$$

$$2\sqrt{3}tgx = 6$$

$$tgx = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$tgx = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

<u>Пример 2</u>. $\boldsymbol{4sin^2x + 3sinx \cdot cosx = cos^2x}$

Это однородное уравнение 2-ой степени. Перенесем cos^2x в левую сторону и разделим уравнение на $cos^2x \neq 0$

$$4sin^2x + 3sinx \cdot cosx - cos^2x = 0$$

$$4 \cdot \frac{sin^2x}{cos^2x} + 3\frac{sinx \cdot cosx}{cos^2x} - \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{0}{cos^2x}$$
$$4tg^2x + 3tgx - 1 = 0$$

Получили квадратное уравнение $\boldsymbol{tgx = t}$, где $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}$:

$$4t^2 + 3t - 1 = 0$$

$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25 = 5^2;$

$t_1 = \frac{-3-5}{2\cdot4} = -1;$ $\quad t_2 = \frac{-3+5}{2\cdot4} = \frac{1}{4}$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблицы «Решение простейших тригонометрических уравнений»:

$tgx = -1$

Частный случай a=-1:

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$

$tgx = \dfrac{1}{4}$

$x = arctg\dfrac{1}{4} + \pi k$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k;\quad x = arctg\frac{1}{4} + \pi k$

<u>Пример 3</u>. $\boldsymbol{2,5 \cdot cos^2x - 7,5sin^2x + 8sinx \cdot cosx = 1,5}$

Для решения этого уравнения, необходимо применить формулу $\boxed{\boldsymbol{D = D \cdot (cos^2\alpha + sin^2\alpha)}}$, где D – некоторое действительное число.

Тогда уравнение примет вид:

$$2{,}5 \cdot cos^2x - 7{,}5sin^2x + 8sinx \cdot cosx = 1{,}5 \cdot (cos^2x + sin^2x)$$
$$2{,}5 \cdot cos^2x - 7{,}5sin^2x + 8sinx \cdot cosx = 1{,}5cos^2x + 1{,}5sin^2x$$
$$2{,}5 \cdot cos^2x - 7{,}5sin^2x + 8sinx \cdot cosx - 1{,}5cos^2x - 1{,}5sin^2x = 0$$
$$-9sin^2x + 8sinxcosx + cos^2x = 0$$

Получили однородное уравнение 2-ой степени, разделим его на $\boldsymbol{cos^2x \neq 0}$

$$-9\frac{sin^2x}{cos^2x} + 8\frac{sinx \cdot cosx}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{0}{cos^2x}$$
$$-9tg^2x + 8tgx + 1 = 0$$
$$9tg^2x - 8tgx - 1 = 0$$

Получили квадратное уравнение $\boldsymbol{tgx = t}$, где $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}$:

$$9t^2 - 8t - 1 = 0$$

$D = 8^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-1) = 64 + 36 = 100 = 10^2;$

$t_1 = \frac{8-10}{2\cdot9} = -\frac{1}{9};$ $\quad t_2 = \frac{8+10}{2\cdot9} = 1$

$tgx = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$tgx = -\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; x = -arctg\frac{1}{9} + \pi k$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\quad x = -arctg\frac{1}{9} + \pi k$

<u>Пример 4</u>. $\boldsymbol{10sin^26x + \sqrt{3}sin12x = 9}$

Для решения этого уравнения, необходимо применить формулу синус двойного аргумента $\boxed{\boldsymbol{sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha}}$ и тождество $\boxed{\boldsymbol{D = D \cdot (cos^2\alpha + sin^2\alpha)}}$, где D – некоторое действительное число (в нашем примере это число 9).

$$10sin^26x + \sqrt{3}sin12x = 9$$
$$10sin^26x + 2\sqrt{3}sin6x \cdot cos6x = 9 \cdot (cos^26x + sin^26x)$$

$$10sin^2 6x+2\sqrt{3}sin6x\cdot cos6x=9cos^2 6x+9sin^2 6x$$

$$10sin^2 6x+2\sqrt{3}sin6x\cdot cos6x-9cos^2 6x-9sin^2 6x=0$$

$$sin^2 6x+2\sqrt{3}sin6x\cdot cos6x-9cos^2 6x=0$$

Получили однородное уравнение 2-ой степени, разделим его на $\boldsymbol{cos^2 x\neq 0}$

$$\frac{sin^2 6x}{cos^2 6x}+2\sqrt{3}\frac{sin6x\cdot cos6x}{cos^2 6x}-9\frac{cos^2 6x}{cos^2 6x}=\frac{0}{cos^2 6x}$$
$$tg^2 6x+2\sqrt{3}tg6x-9=0$$

Теперь заменим $\boldsymbol{tgx=t}$, где $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{R}$:

$$t^2+2\sqrt{3}t-9=0$$

Решим получившееся квадратное уравнение

$$D=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 1\cdot(-9)=12+36=48=(16\cdot 3)=(4\sqrt{3})^2$$
$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$
$$t_1=\frac{-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};\quad t_2=\frac{-2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2}=\frac{-6\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблицы «Решение простейших тригонометрических уравнений»:

$$tg6x=\sqrt{3}$$
$$6x=arctg\sqrt{3}+\pi k$$
$$6x=\frac{\pi}{3}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{6}$$

$$tg6x=-3\sqrt{3}$$
$$6x=arctg\left(-3\sqrt{3}\right)+\pi k$$
$$6x=-arctg3\sqrt{3}+\pi k$$
$$x=-\frac{1}{6}arctg3\sqrt{3}+\frac{\pi k}{6}$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{6};\quad x=-\frac{1}{6}arctg3\sqrt{3}+\frac{\pi k}{6}$

<u>Пример 5</u>. $\boldsymbol{3sinx-5cosx=3}$

Чтобы привести данное тригонометрическое уравнение к однородному уравнению следует применить формулы двойного аргумента: $\boxed{\boldsymbol{sin2\alpha=2sin\alpha\cdot cos\alpha}}$ и $\boxed{\boldsymbol{cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha}}$, а также тождество $\boxed{\boldsymbol{D=D\cdot(cos^2\alpha+sin^2\alpha)}}$, где D=3 по условию.

Итак, заменим по указанным формулам:

$$sinx=2sin\tfrac{x}{2}\cdot cos\tfrac{x}{2};$$
$$cosx=cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}$$
$$3=3\cdot\left(cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}\right)$$

И получим уравнение: $3\cdot 2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}-5\cdot\left(cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}\right)=3\cdot\left(cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}\right)$

$$6sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}-5cos^2\frac{x}{2}+5sin^2\frac{x}{2}=3cos^2\frac{x}{2}+3sin^2\frac{x}{2}$$
$$6sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}-5cos^2\frac{x}{2}+5sin^2\frac{x}{2}-3cos^2\frac{x}{2}-3sin^2\frac{x}{2}=0$$
$$2sin^2\frac{x}{2}+6sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}-8cos^2\frac{x}{2}=0$$

Получили однородное уравнение 2-ой степени, разделим его на $\boldsymbol{cos^2\frac{x}{2}\neq 0}$

$$2\frac{sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}+6\frac{sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}-8\frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{cos^2\frac{x}{2}}$$

$2tg^2\frac{x}{2}+6tg\frac{x}{2}-8=0.$ Разделим на 2:

$$tg^2\frac{x}{2}+3tg\frac{x}{2}-4=0$$

Теперь заменим $\boldsymbol{tg\frac{x}{2}=t}$, где $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{R}$:

$$t^2+3t-4=0$$

Решим получившееся квадратное уравнение

$$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25=5^2$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

$$t_1=\frac{-3+5}{2}=1;\quad t_2=\frac{-3-5}{2}=-4$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблицы «Решение простейших тригонометрических уравнений»:

$tg\frac{x}{2}=1$

Частный случай а=1:

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\qquad k\epsilon Z$

$tgx=-4$

$\frac{x}{2}=arctg(-4)+\pi k$

$\frac{x}{2}=-arctg4+\pi k$

$x=-2arctg4+2\pi k$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\epsilon Z;\quad x=-2arctg4+2\pi k, k\epsilon Z$