Практическая работа:
Решение тригонометрических уравнений различных типов

Разработчик: ***И. А. Кочеткова, Ж. И. Тимошко***

Цель работы:

1) Повторить тригонометрические формулы двойного аргумента, формулы сложения, основные тригонометрические тождества;
2) Повторить определения обратных тригонометрических функций и их свойства;
3) Закрепить умения решать простейшие тригонометрические уравнения;
4) Усвоить метод введения вспомогательного угла и метод решения уравнения вида $\mathrm{P}(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$, закрепить метод введения новой переменной

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы:

   2.1. Какие уравнения называются простейшими тригонометрическими? Как они решаются?

   2.2. При каких а имеют решения уравнения $\boldsymbol{sinx = a}$ и $\boldsymbol{cosx = a}$?

   2.3. Что значит частные случаи и когда они применяются?

   2.4. Назовите какого вида тригонометрическое уравнение решается методом введения вспомогательного аргумента (угла)? И расскажите алгоритм решения

   2.5. Расскажите как решаются тригонометрические уравнения вида $P(sinx \pm cosx, sinx \cdot cosx) = 0$
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить примеры.
5. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Теория

1) Решение тригонометрических уравнений **метод введения вспомогательного аргумента** (вспомогательного угла)

Данный метод применяется для уравнений вида $\boxed{a \cdot sinx + b \cdot cosx = c}$, где a, b, c – некоторые действительные числа.

1. Преобразовать уравнение к нужному виду $\boxed{a \cdot sinx + b \cdot cosx = c}$, если нужно.
2. Найти поправочный коэффициент $a^2 + b^2$, взять из него корень $l = \sqrt{a^2 + b^2}$ и разделить на него обе части уравнения.
3. Смотрим, какие значения синуса и косинуса получаются у чисел. Если значения не табличные, то заменяем их на $sin\varphi$, $cos\varphi$ какого-то неизвестного нам угла φ. При этом проверяем основное тригонометрическое тождество $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$
4. Раскладываем уравнение по формулам синуса или косинуса разности или суммы:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

5. Решаем простейшее тригонометрическое уравнение.

Уравнение $\boxed{\boldsymbol{a \cdot sinx + b \cdot cosx = c}}$, $a^2 + b^2$ делят на $l = \sqrt{a^2 + b^2}$ и получают уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует **угол φ** такой, что $sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а $cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда уравнение примет вид:

$$sinx \cdot sin\varphi + \ cosx \cdot cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Применим формулу сложения и получим:

$$cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Далее используем таблицу «Решение простейших тригонометрических уравнений» и выписываем решение:

$$x - \varphi = \pm arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2\pi k, k \in Z$$
$$x = \varphi \pm arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2\pi k, k \in Z$$

---

2) Решение тригонометрических уравнений вида $\boldsymbol{P(sinx \pm cosx, sinx \cdot cosx) = 0}$ решаются с помощью замены $sinx \pm cosx = t$.

1) Приводим уравнение к виду $P(sinx \pm cosx, sinx \cdot cosx) = 0$, если нужно.
2) Делаем замену $sinx + cosx = t$ или $sinx - cosx = t$
3) Возводим обе части этого равенства в квадрат и выражаем $sinx \cdot cosx$ через t. Получится

$$\boxed{\boldsymbol{sinx + cosx = t \Rightarrow 2sinx \cdot cosx = t^2 - 1} \text{ или } \boldsymbol{sinx \cdot cosx = \frac{t^2-1}{2}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{sinx - cosx = t \Rightarrow 2sinx \cdot cosx = 1 - t^2} \text{ или } \boldsymbol{sinx \cdot cosx = \frac{1-t^2}{2}}}$$

4) Решаем простейшее тригонометрическое уравнение.

Пример 1. Решить уравнение

$$\boldsymbol{tgx - 4ctgx = 3}$$

Решение. Данное уравнение приводится к квадратному уравнению с помощью замены переменной. Для этого используют тождество $\boldsymbol{tgx \cdot ctgx = 1 \Rightarrow ctgx = \frac{1}{tgx}}$

Итак, заменяем $\boldsymbol{ctgx = \frac{1}{tgx}}$ и получаем уравнение:

$$tgx - 4 \cdot \frac{1}{tgx} = 3$$

Теперь делаем замену $\boldsymbol{tgx = t}$, где $\boldsymbol{t \in R}$:

$$t - \frac{4}{t} = 3$$

Умножаем обе части уравнения на $t \neq 0$ и получаем квадратное уравнение:

$$t^2 - 4 = 3t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2;$

$t_1 = \frac{3-5}{2 \cdot 1} = -1;$ $\qquad$ $t_2 = \frac{3+5}{2 \cdot 1} = 4$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблицы «Решение простейших тригонометрических уравнений»:

$tgx = -1$

Частный случай а=-1:

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$

$tgx = 4$

$x = arctg4 + \pi k$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $\ x = arctg4 + \pi k$

Пример 2. Решить уравнение

$$\boldsymbol{cosx + sinx = 1}$$

Решение. 1) a=1, b=1,

найдем поправочный коэффициент $l = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ и разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} cosx + \frac{1}{\sqrt{2}} sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Замечаем, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = sin\frac{\pi}{4}$ или $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\frac{\pi}{4}$

Заменим числа на соответствующие значения тригонометрических функций и получим формулу сложения:

$$cos\frac{\pi}{4} cosx + sin\frac{\pi}{4} sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Смотрим таблицу «Решение простейших тригонометрических уравнений» и выписываем решение:

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$$
$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z$$
$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z$$

Разбиваем решение на два случая:

$$x_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi k=2\pi k, \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$$

Ответ: $x_1=2\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$

Пример 3. Решить уравнение $\boldsymbol{\sqrt{13}cosx-\sqrt{23}sinx=6}$

Решение. $a=\sqrt{13}, b=\sqrt{23}$

найдем поправочный коэффициент $l=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13+23}=\sqrt{36}=6$ и разделим обе части уравнения на 6:

$$\frac{\sqrt{13}}{6}cosx-\frac{\sqrt{23}}{6}sinx=1$$

Замечаем, что значения $\frac{\sqrt{13}}{6}$ и $\frac{\sqrt{23}}{6}$ не являются табличными. Так как $\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2=\frac{13}{36}+\frac{23}{36}=\frac{36}{36}=1$, то существует **угол φ** такой, что $cos\varphi=\frac{\sqrt{13}}{6}$ и $sin\varphi=\frac{\sqrt{23}}{6}$,

Заменим эти числа на $cos\varphi$ и $sin\varphi$ и получим формулу сложения:

$$cos\varphi\cdot cosx-sin\varphi\cdot sinx=1$$
$$cos(x+\varphi)=1$$

Смотрим таблицу «Решение простейших тригонометрических уравнений» и выписываем решение (это частный случай):

$$x+\varphi=2\pi k,$$
$$x=-\varphi+2\pi k, k\epsilon Z$$

Т. к. $cos\varphi=\frac{\sqrt{13}}{6}$, то $\varphi=arccos\frac{\sqrt{13}}{6}$ и тогда окончательное решение примет вид:

$$x=-arccos\frac{\sqrt{13}}{6}+2\pi k, k\epsilon Z$$

Ответ: $x=-arccos\frac{\sqrt{13}}{6}+2\pi k, k\epsilon Z$

Пример 4. Решить уравнение $\boldsymbol{sin2x-cos2x=\sqrt{2}sin6x}$

Решение.

a=1, b=1, найдем поправочный коэффициент $l=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ и разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}sin2x-\frac{1}{\sqrt{2}}cos2x=sin6x$$

Замечаем, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = sin\frac{\pi}{4}$ или $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\frac{\pi}{4}$

Заменим числа на соответствующие значения тригонометрических функций и получим формулу сложения (при этом еще учтем, какая функция находится в правой части уравнения):

$$sin\frac{\pi}{4}cos2x - cos\frac{\pi}{4}sin2x = sin6x$$

$$sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = sin6x$$

$$sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - sin6x = 0$$

Т. к. функция синус нечетная, то

$$-sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - sin6x = 0, \text{ умножим на (-1)}$$

$$sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + sin6x = 0$$

Применим формулу «Преобразования суммы тригонометрических функций в произведения» $\boldsymbol{sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}}$ и получим:

$$2sin\frac{2x - 90^0 + 6x}{2} \cdot cos\frac{2x - 90^0 - 6x}{2} = 0$$

$$2sin\frac{8x - 90^0}{2} \cdot cos\frac{-90^0 - 4x}{2} = 0$$

$$2sin(4x - 45^0) \cdot cos(-45^0 - 2x) = 0$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю:

$$sin(4x - 45^0) = 0 \text{ или } cos(-45^0 - 2x) = 0$$

Получили два простейших уравнения. Решаем их с помощью таблиц 1 и 2:

$$sin(4x - 45^0) = 0$$

Частный случай a=0:

$$4x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in Z$$

$$4x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$$

$$cos(-45^0 - 2x) = 0$$

Функция четная, поэтому

$$cos(2x + 45^0) = 0$$

Частный случай a=0:

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z;\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Пример 5. Решить уравнение $\boldsymbol{sinx + cosx = 1 + sinx \cdot cosx}$

Решение.

Обозначим $\boldsymbol{sinx + cosx = t}$ и возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$(sinx + cosx)^2 = t^2$$

$$sin^2x + 2sinx \cdot cosx + cos^2x = t^2$$

$$1 + 2sinx \cdot cosx = t^2$$

$$2sinx \cdot cosx = t^2 - 1$$

$$\boldsymbol{sinx \cdot cosx = \frac{t^2 - 1}{2}}$$

Подставим эти выражения в уравнение и получим:

$$t = 1 + \frac{t^2 - 1}{2}$$

Умножим на 2: $2t = 2 + t^2 - 1$

Перенесем слагаемые в правую часть: $2 + t^2 - 1 - 2t = 0$

Приведем подобные и получим квадратное уравнение: $t^2 - 2t + 1 = 0$

Решим его и получим $t = 1$

Значит $sinx + cosx = 1$

Далее поступаем как в примере №1 и получаем $x_1 = 2\pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$

Ответ. $x_1 = 2\pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$