Молодечненский государственный политехнический колледж

Практическая работа: Исследование функций на монотонность и экстремумы с помощью первой производной.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Отработать навыки исследования функций на монотонность и экстремумы.
2. Развивать аналитическое и логическое мышление учащихся.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

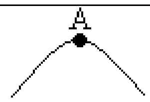
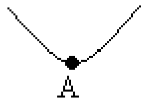
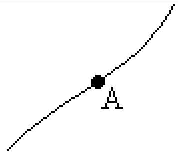
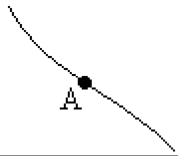
1. Повторить основные теоретические сведения.
2. Изучить указания к выполнению практической работы.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Изучить условия заданий и согласно схеме исследовать функцию на монотонность или на экстремум (в зависимости от условия).
5. Оформить отчёт.

Для выполнения практической работы используйте следующие теоретические сведения:

<u>Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума</u>:

1. Найти область определения функции D(y).
2. Найти $y'(x)$ и критические точки (точки x=a, в которых $y'(a)=0$ или $y'(a)$ не существует). Для этого производная приравнивается нулю и находятся корни уравнения $y'(x)=0$, а так же выясняется, в каких точках производная не существует.
3. Производную разложить на множители.
4. Критические точки нанести на числовую прямую в порядке возрастания.
5. Определить знаки производной на каждом интервале. Если $y'(x)>0$, то функция на данном интервале возрастает. Если $y'(x)<0$, то функция на данном интервале убывает.
6. Если x=a $\in$ D(y) и производная при переходе аргумента через точку x=a меняет свой знак с «+» на «–», то эта точка максимума. Если x=a $\in$ D(y) и производная при переходе аргумента через точку x=a меняет свой знак с «-» на «+», то эта точка <u>минимума.</u>
7. Определить ординаты точек экстремума и нанести на координатную плоскость.

Таблица 1

Знак производной			Характер изменения функции	Вид графика вблизи точки а
	При x < a	При x > a		
1	+	–	максимум	
2	–	+	минимум	
3	+	+	возрастает	
4	–	–	убывает	

Указания к выполнению практической работы

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^3 + x^2 + 7x$ возрастает (убывает) на всей области определения.

Решение.

1) Область определения – все действительные числа.

2) Найдем производную $y' = 3x^2 + 2x + 7$

3) Определим критические точки. Для этого производную приравняем нулю и найдём корни уравнения

$$3x^2 + 2x + 7 = 0;$$

D=4-4·3·7= - 80<0.

Критических точек нет.

Из свойств квадратичной функции $y' = 3x^2 + 2x + 7$ известно, что если D<0 и a>0 (a=3), то функция положительна при любом x из области определения функции, значит $y'(x) > 0$. Делаем вывод, что функция возрастает на всей области определения.

Ответ: функция возрастает на всей области определения.

Пример 2. Исследовать функцию $y=\frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$ на монотонность, точки экстремума. Сделать эскиз графика.

Решение:

1) Область определения – все действительные числа.

2) Найдем производную $y' = 2x^2 - 2$

3) Определим критические точки

$2x^2-2=0$; $x^2-1=0$; $(x+1)(x-1)=0$

$x_1=-1$; $x_2=1$.

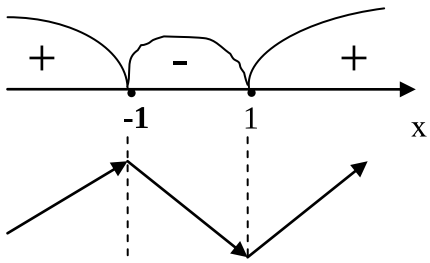


Рис.1

4) Нанесем точки на числовую ось и определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов: $y' = 2x^2 - 2 = 2\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

5) Получили схему поведения функции (рис.1), из которой видно, что функция строго возрастает на интервалах $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ и убывает на интервале (-1;1).

6) Определим ординаты точек экстремума:

$$y(-1) = \frac{2}{3}(-1)^3 - 2\cdot(-1) + 1 = -\frac{2}{3} + 2 + 1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{9-7}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3};$$

$$y(1) = \frac{2}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1 + 1 = \frac{2}{3} - 2 + 1 = \frac{2}{3} - 1 = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$$

Итак $\left(-1;2\frac{1}{3}\right)$ - точка максимума; $\left(1;-\frac{1}{3}\right)$ - точка минимума.

Сделаем эскиз данного графика. Для этого а) нанесём точки на координатную плоскость и, используя таблицу 1, изобразим вид графика вблизи данных точек (рис.2); б) соединим точки, как на схеме (рис.1)

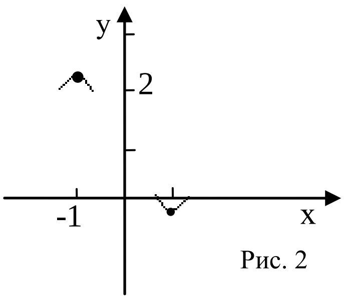
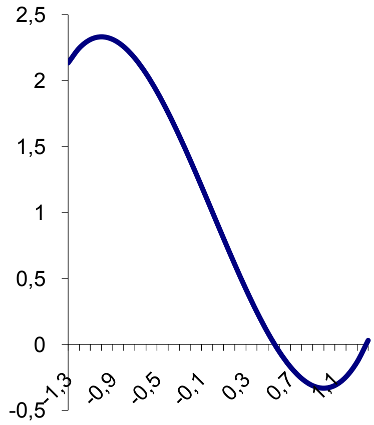


Рис. 2



Ответ: $\left(-1;2\frac{1}{3}\right)$ - точка максимума; $\left(1;-\frac{1}{3}\right)$ - точка минимума.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \frac{x^2+16}{4x}$ на монотонность и точки экстремума.

Решение:

1) Область определения: все действительные числа кроме 0.

2) Найдем производную функции. Запишем функцию в другом виде $y = \frac{x^2+16}{4x} = \frac{x^2}{4x} + \frac{16}{4x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$

$$y' = \left(\frac{x}{4} + \frac{4}{x}\right)' = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2}$$

3) Определим критические точки. Для этого решим уравнение: $\frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = 0;$

$$\frac{x^2-16}{4x^2} = 0;$$

$$\frac{(x-4)(x+4)}{4x^2} = 0.$$

Критические точки: $x_1 = -4$, $x_2 = 4$ и $x_3 = 0$ (в этой точке производная не существует).

4) Нанесем эти точки на числовую прямую и определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов.

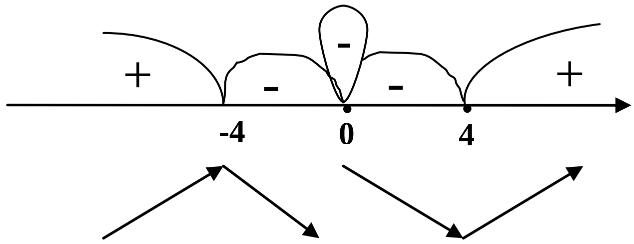


Рис.1

5) Т.к. производная меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x=-4 и с минуса на плюс при переходе через точку x=4, то x_{max} =-4 и x_{mix} =4.

6) Определим ординаты точек экстремума:

$y(-4)=\frac{-4}{4}+\frac{4}{-4}=-1-1=-2$;

$y(4)=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=1+1=2$.

Итак, получили, что (-4; -2) – точка максимума, а (4; 2) – точка минимума.

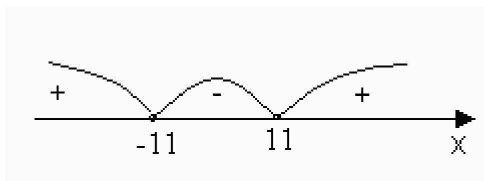
Функция строго возрастает на интервалах $x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$ и убывает на интервалах $x\in(-4;0)\cup(0;4)$. В точке x=0 функция терпит разрыв.

Пример 4. Исследовать функцию $y=\ln(x^2-121)$ на монотонность и точки экстремума.

1) Область определения – все числа, при которых выражение $x^2-121>0$;

   (x-11)(x+11) > 0

   $D(y)=(-\infty;-11)\cup(11;+\infty)$



2) Найдем производную функции:

$$y'=\frac{1}{x^2-121}\cdot(x^2-121)'=\frac{2x}{x^2-121}$$

3) Определим критические точки. Для этого решим уравнение: $\frac{2x}{x^2-121}=0$

   Критические точки: x_1 =0, x_2 = -11 и x_3 = 11 (в точках x_2 и x_3 производная не существует).

4) Нанесем эти точки на числовую прямую и определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов, принадлежащих области определения. (Область определения указана штриховкой)

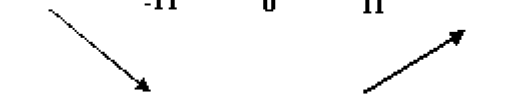


Рис.1

5) Все критические точки не принадлежат области определения функции, поэтому они не являются точками экстремума функции.

6) Функция убывает на интервале $x\in(-\infty;-11)$ и возрастает на интервале $x\in(11;+\infty)$.

Контрольные вопросы:

1) Что называется функцией?
2) Какие функции называются монотонными?
3) Необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции.
4) Схема исследования функции на монотонность.
5) Определение экстремума функции.
6) Необходимое и достаточное условие существования экстремума.
7) Схема исследования функций на экстремум.