Министерство образования Республики Беларусь
Молодечненский государственный политехнический колледж

Практическая работа: Решение задач по теме: «Пирамида, её виды и свойства. Объём, площадь поверхности»**.**

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Повторить и закрепить виды пирамид и их свойства.
2) Выработать умения делать к задачам грамотные чертежи.
3) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Пирамида»

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия задач. Определить способ их решения.
4. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.
7. Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

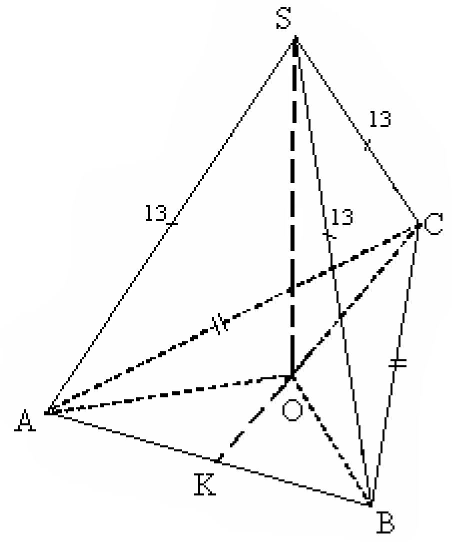
1) **Правильной пирамидой** называется пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и высота проходит через центр основания. (Центр квадрата – точка пересечения его диагоналей; центр равностороннего треугольника – точка пересечения его медиан, высот, биссектрис)
2) Если боковые рёбра равнонаклонены к плоскости основания (или, что то же самое, боковые рёбра равны), то высота проходит через центр описанной около основания окружности.
3) Если все боковые грани равнонаклонены к плоскости основания (или, что то же самое, апофемы равны), то высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности.

Основные формулы:

1) $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $S_{осн}$- площадь основания пирамиды; $S_{бок}$ – сумма площадей её боковых граней
2) Объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.
3) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению периметра основания на высоту боковой грани (апофему) пирамиды $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_{бок}$
4) Объём усечённой пирамиды: $V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$, где S_1, S_2- площади оснований, H- высота усечённой пирамиды.
5) Для правильной усечённой пирамиды $S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot h_{бок}$, где P_1, P_2- периметры оснований, $h_{бок}$- высота боковой грани.

Указания к выполнению практической работы

Задача 1. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 см и высота – 9 см. Боковые рёбра равны между собой и каждое равно 13 см. Определить высоту этой пирамиды.



Дано: SABC – пирамида; ΔABC- равнобедренный (AC=CB);
AB=6 см; CK – высота ΔABC; CK=9 см;
SA=SB=SC=13 см; SO – высота пирамиды;
Найти: SO

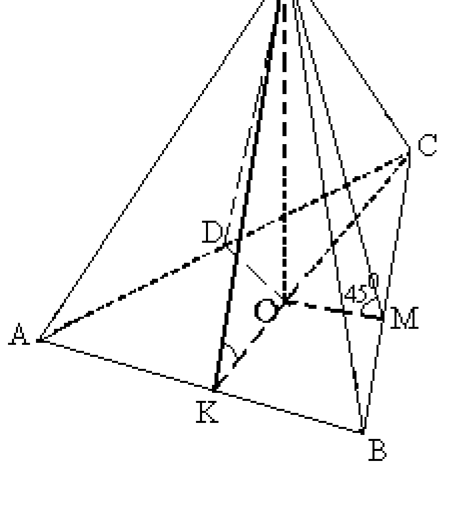
Решение.

1) O – основание высоты пирамиды. Так как по условию SA=SB=SC, то OA=OB=OC (у равных наклонных равные проекции). Значит O – равноудалена от вершин ΔABC и является центром описанной около него окружности. Найдём радиус этой окружности по формуле: $R = \dfrac{abc}{4S_\Delta}$.
2) Площадь ΔABC найдём по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a$; $S = \frac{1}{2} CK \cdot AB = 27$ (см^2).
3) Стороны AC=CB найдём из прямоугольного ΔAKC (CK$\perp$AB и AK=KB=3 см) по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$.
4) $R = \dfrac{\sqrt{90} \cdot \sqrt{90} \cdot 6}{4 \cdot 27} = 5$. Итак, OA=OB=OC=5.
5) Так как SO – высота пирамиды, то SO $\perp$ плоскости ΔABC, значит $SO \perp AO$ и ΔSOA – прямоугольный. По теореме Пифагора найдём катет SO: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{169-25} = 12$.

Ответ: 12 см.

Замечание: Центр окружности описанной около прямоугольного треугольника находится на середине гипотенузы.

Задача 2. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12см, а боковая сторона равна 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы по 45^0. Определить высоту пирамиды.



Дано: SABC – пирамида; ΔABC- равнобедренный; AC=CB=10;
AB=12 см; SO – высота пирамиды;
Двугранные углы при основании равны по 45^0;
Найти: SO

Решение.

1) Построим линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью SCB и плоскостью ΔABC. Для этого в данных плоскостях проведём перпендикуляры SM, OM к их общему ребру BC. Получившийся $\angle$SMO = 45^0. Таким же образом

строятся углы $\angle SKO$ (угол, образованный боковой гранью SAB и плоскостью ΔABC) и $\angle SDO$(угол, образованный боковой гранью SAC и плоскостью ΔABC).

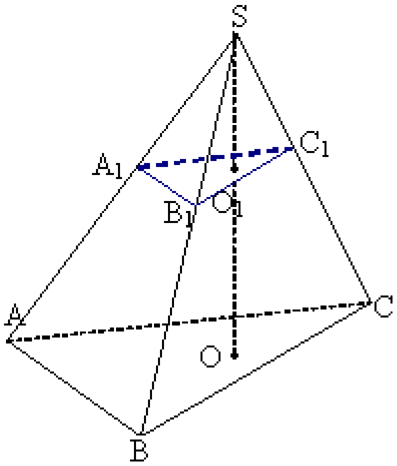
2) $\Delta SMO=\Delta SKO=\Delta SDO$ по острому углу и катету (катет SO – общий). Значит OM=OK=OD, т. е. точка O равноудалена от сторон ΔABC и является центром вписанной в него окружности. Найдём радиус этой окружности по формуле: $r=\dfrac{S_\Delta}{p}$.

3) Площадь ΔABC найдём по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=(a+b+c)/2$; p=16; $S_{\Delta ABC}$= 48 (см^2). Тогда $r=\dfrac{S_\Delta}{p}=\dfrac{48}{16}=3$. Итак, OM=OK=OD=3 (см).

4) Так как SO – высота пирамиды, то SO $\perp$ плоскости ΔABC, значит SO $\perp$ MO и ΔSOM – прямоугольный. $tg45^0=\dfrac{SO}{MO}$. Следовательно, $SO=MO\cdot tg45^0=3$ (см).

Ответ: 3 см.

Задача 3. Высота пирамиды равна 16м, площадь основания равна 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение параллельное основанию, содержащее 50 м^2.



Дано: SO=16 м; $S_{осн.}$=512 м^2; $S_{сеч.}$=50 м^2.
Найти: OO_1.

Решение.

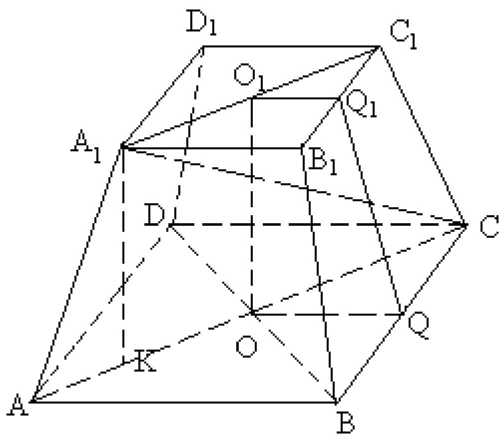
1) Плоскость, параллельная основанию, отсекает от пирамиды подобную ей пирамиду. Тогда площадь сечения так относится к площади основания, как квадраты высот получившихся пирамид, т. е. $\dfrac{S_{сеч}}{S_{осн}}=\dfrac{SO_1^2}{SO^2}$.

2) Найдём отрезок $SO_1^2=\dfrac{S_{сеч}\cdot SO^2}{S_{осн}}=\dfrac{50\cdot 16^2}{512}=25$; SO_1=5 (см)

3) $OO_1=SO-SO_1=16-5=11$ (см)

Ответ: 11 см.

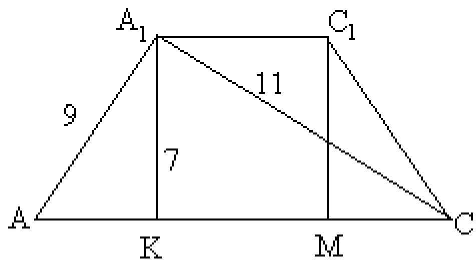
Задача 4. а) Определить стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если её высота равна 7 м, боковое ребро – 9 см, диагональ – 11 см. б) Найти объём и площадь.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная усечённая пирамида;
OO_1 – высота пирамиды; OO_1=7 см;
$AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$=9 см;
CA_1=11 см
Найти: а) AB и A_1B_1; б) V и $S_{полн}$

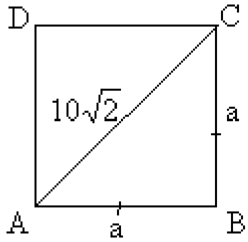
Решение.

1)В основаниях правильной четырёхугольной усечённой пирамиды лежат квадраты ABCD и $A_1B_1C_1D_1$. Чтобы определить их стороны, найдём сначала диагонали AC и A_1C_1. Для



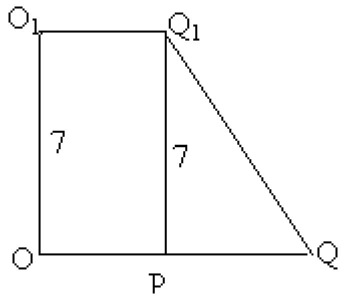
этого рассмотрим трапецию AA_1C_1C, расположенную в диагональном сечении пирамиды.

2) Из ΔAKA_1 по теореме Пифагора найдём АК: $AK = \sqrt{A_1A^2 - A_1K^2} = \sqrt{81-49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
3) Из ΔA_1CK по теореме Пифагора найдём КС: $CK = \sqrt{A_1C^2 - A_1K^2} = \sqrt{121-49} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
4) АС=АК+КС=$10\sqrt{2}$.
5) A_1C_1=КМ=АС-2АК=$10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
6) Теперь рассмотрим квадрат ABCD и найдём сторону АВ по теореме Пифагора:



АВ=СВ=а; $AC^2 = a^2 + a^2$;
$\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot a^2$;
$200=2a^2$; $a^2=100$; <u>a=10</u>.
Итак, АВ=10 (см).

7) Таким же образом, рассмотрев квадрат $A_1B_1C_1D_1$, находим, что сторона верхнего основания A_1B_1=2 см.
8) Для нахождения объёма данной усеченной пирамиды воспользуемся формулой: $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, где $H=OO_1$=7см, S_1- площадь нижнего основания (площадь квадрата $S_1 = 10^2 = 100$ см^2) и S_2- площадь верхнего основания ($S_2 = 2^2 = 4$ см^2). Значит объём равен $V = \frac{1}{3}7 \cdot \left(100 + \sqrt{100 \cdot 4} + 4\right) = \frac{868}{3}$ (см^3).
9) Для нахождения площади поверхности данной пирамиды воспользуемся формулой $S_{полн} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right) \cdot h_{бок}$, где S_1=100 см^2, S_2=4 см^2, а P_1 – периметр нижнего основания (периметр квадрата ABCD), P_1=4a=40 см, P_2- периметр верхнего основания (квадрата $A_1B_1C_1D_1$), $P_2=4 \cdot 2$=8 см



Найдём $h_{бок}=QQ_1$ - высоту боковой грани. Для этого рассмотрим прямоугольную трапецию OQQ_1O_1.
В ней проведём высоту $Q_1P= OO_1$=7 см. Отрезки $OQ = \frac{1}{2}AB = 5$ (см) и $O_1Q_1 = \frac{1}{2}A_1B_1 = 1$ (см).

Тогда OP= Q_1O_1=1, PQ= OQ-OP=5-1=4 (см)
Из прямоугольного ΔQ_1QP по теореме Пифагора найдём Q_1Q:

$QQ_1 = \sqrt{Q_1P^2 + PQ^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$ (см).

Итак, $S_{полн} = 100 + 4 + \frac{1}{2}\left(40+8\right) \cdot \sqrt{65} = 104 + 24\sqrt{65}$ (см^2).

Ответ: а) 10 см и 2 см; б) $868/3$ см^3 и $104 + 24\sqrt{65}$ см^2.

Контрольные вопросы:
1) Какой многогранник называется пирамидой? Какой отрезок называется высотой пирамиды?
2) Перечислите 4 случая высоты пирамиды.
3) Как найти объём пирамиды и площадь её поверхности?

4) Какая пирамида называется правильной? Перечислите свойства правильной пирамиды. Как находится площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
5) Назовите свойства параллельных сечений пирамиды.
6) Какая пирамида называется усечённой? Из каких многогранников она состоит?
7) Назовите свойства правильной усечённой пирамиды.
8) Как найти объём усечённой пирамиды и площадь поверхности правильной усечённой пирамиды?