МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Филиал «Молодечненский государственный политехнический колледж» учреждения образования «Республиканский институт профессионального образования»

Практическое занятие: Вычисление объёма и площади поверхности цилиндра.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Повторить и закрепить основные элементы цилиндра и его сечений.
2) Выработать умения делать к задачам наглядные чертежи.
3) Повторить формулы и понятия планиметрии: площадь круга, длина окружности, центральный и вписанные углы, формулы площадей треугольника, прямоугольника;
4) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Цилиндр»

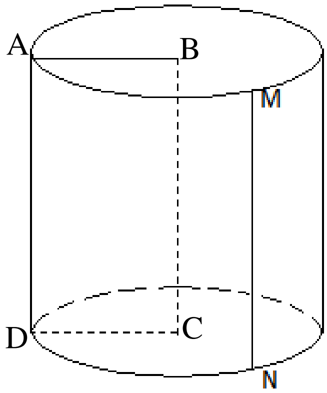
Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
   a. При вращении какого многоугольника получается цилиндр?
   b. Перечислите основные элементы цилиндра.
   c. Дайте определения радиусу, хорде, диаметру окружности. По каким формулам можно найти площадь круга и длину окружности?
   d. Дайте определения образующей и высоте цилиндра. Что такое ось цилиндра.
   e. Что такое центральный угол и как он связан с дугой?
   f. Как найти объём цилиндра и площадь его поверхности?
   g. Какой многоугольник получается в разверстке боковой поверхности цилиндра?
   h. Перечислите основные сечения цилиндра плоскостью. Как найти площади этих сечений?
   i. Когда в сечении цилиндра плоскостью получается прямоугольник? А когда круг?
3. Изучить условия задач. Определить способ их решения.
4. Сделать чертёж. Кратко записать, что задано.
5. Решить задачу.
6. Оформить отчёт.

Указания к выполнению практической работы

Теория



Опр. Фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, называется **цилиндром**.

На рис. цилиндр получен при вращении прямоугольника ABCD вокруг оси, содержащей его сторону BC.

BC – ось цилиндра. Это значит, что цилиндр обладает симметрией.

Элементы цилиндра

1) **Образующая** – отрезок, точки которого при вращении образуют боковую поверхность цилиндра

AD, MN – образующие цилиндра.

Образующая у кругового цилиндра равна высоте.

2) **Высота** – это перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания в точку нижнего основания.

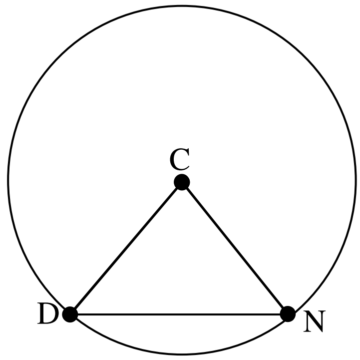
У цилиндра бесконечно много высот и все они равны между собой.

H=AD=BC=MN

3) Основания цилиндра- это два равных круга.

Радиус основания цилиндра – это отрезок, соединяющий центр круга с любой точкой окружности

R=DC=CN=AB



Хорда основания – это отрезок, который соединяет любые две точки окружности

DN – хорда

Диаметр – это хорда, которая проходит через центр круга

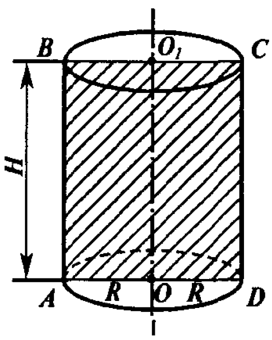
Хорда отсекает от окружности дуги DN и ND.

Из тригонометрии мы знаем, что длина дуги измеряется соответствующим центральным углом.

Центральный угол – это угол, вершина которого находится в центре окружности.

$\angle DCN$ – центральный угол. Величина дуги DN равна величине соответствующего центрального угла $\angle DCN$

$$\boxed{\angle DCN = \cup DN}$$



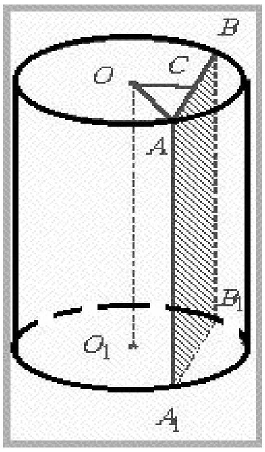
Сечения цилиндра

1) Если плоскость проходит через ось цилиндра и диаметр его основания, то полученное сечение называется **осевым** и представляет собой прямоугольник.

ABCD – осевое сечение цилиндра, где

OO_1 – ось цилиндра;

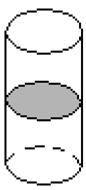
BC – диаметр его основания



2) В сечении будут получаться прямоугольники и тогда, когда секущая плоскость параллельна оси цилиндра.

ABB_1A_1 – прямоугольник; OO_1 – ось цилиндра;

$ABB_1A_1 \parallel OO_1$



OC – расстояние от оси OO_1 до секущей плоскости

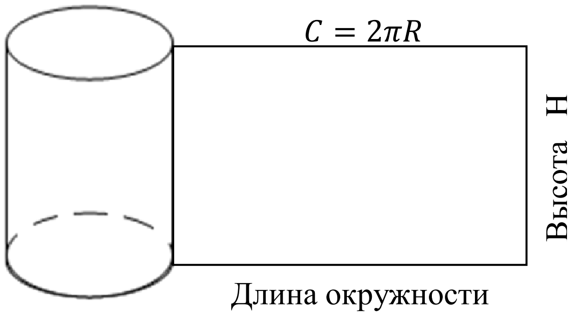
OA – радиус основания цилиндра

3) Если плоскость проходит перпендикулярно оси (параллельно ос-

нованиям), то в сечении получается круг, равный кругу в основании цилиндра.

Площадь поверхности и объём цилиндра:

1) Площадь основания (круга): $S_{осн} = \pi R^2$
2) Длина окружности $C = 2\pi R$
3) Площадь боковой поверхности: $\boxed{S_{бок} = 2\pi RH}$
4) Площадь полной поверхности: $\boxed{S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2}$
5) Объём: $\boxed{V = \pi R^2 H}$

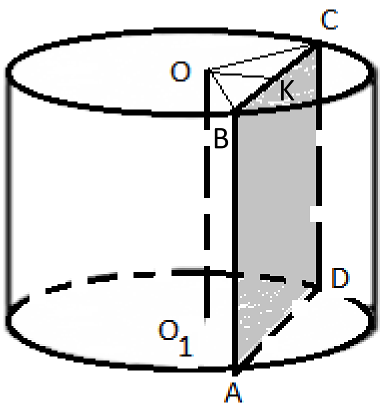


В разверстке боковой поверхности цилиндра получается прямоугольник

$$S_{бок} = S_{прямоугольника} = ab = 2\pi R \cdot H = 2\pi RH$$

Решение типовых примеров

<u>**Задача №1.**</u> Высота цилиндра 18 см, радиус основания - 15 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от секущей плоскости до оси цилиндра.



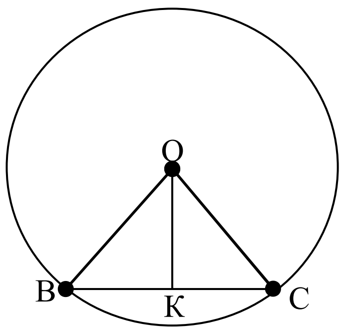
Дано: $OO_1 = 18$; OB=OC=15
ABCD- квадрат; OK⊥(ABCD)
Найти: OK

<u>Решение</u>:

Рассмотрим треугольник BOC. Так как OB=OC как радиусы, то ΔBOC - равнобедренный. Тогда OK является не только высотой, но и медианой и биссектрисой.
Так как ABCD- квадрат, то

$$BC = AB = OO_1 = 18$$

Значит BK = 9.

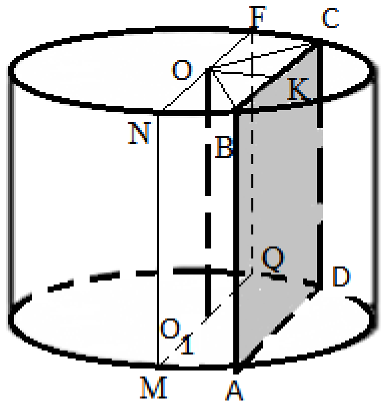


ΔBKO – прямоугольный, так как OK⊥BC. Найдем OK по теореме Пифагора:

$$BO^2 = OK^2 + BK^2$$
$$OK^2 = BO^2 - BK^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$$
$$OK = \sqrt{144} = 12$$

Ответ: 12.

<u>Задача №2.</u> Площадь осевого сечения цилиндра 104 см^2, площадь основания 169 π см^2. Вычислить площадь сечения, параллельного оси и отстоящего от нее на 5 см



Дано: $S_{MNFQ} = 104$; $S_{осн} = 169\pi$;
OK⊥(ABCD); OK=5
Найти: S_{ABCD}

<u>Решение</u>:

1) Основание цилиндра – круг, значит его площадь находится по формуле:

$$S_{осн} = \pi R^2$$
$$R^2 = \frac{S_{осн}}{\pi} = \frac{169\pi}{\pi} = 169$$
$$R = \sqrt{169} = 13$$

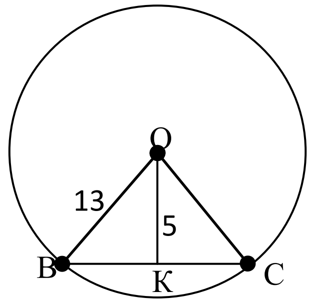
ON=OF=OB=OC=13

2) Рассмотрим прямоугольник MNFQ

Одна из его сторон NF является диаметром круга, значит NF=2R=26
Вторую сторону MN можно найти из площади диагонального сечения:
$S_{MNFQ} = MN \cdot NF$

$$MN = \frac{S_{MNFQ}}{NF} = \frac{104}{26} = 4$$

MN – высота цилиндра и его образующая, значит образующая **AB=4**



3) Рассмотрим Δ BOC. Так как OB=OC как радиусы, то ΔBOC - равнобедренный. Тогда OK является не только высотой, но и медианой и биссектрисой.
Из прямоугольного ΔBKO найдем BK по теореме Пифагора:

$$BO^2 = OK^2 + BK^2$$
$$BK^2 = BO^2 - OK^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$
$$BK = \sqrt{144} = 12$$

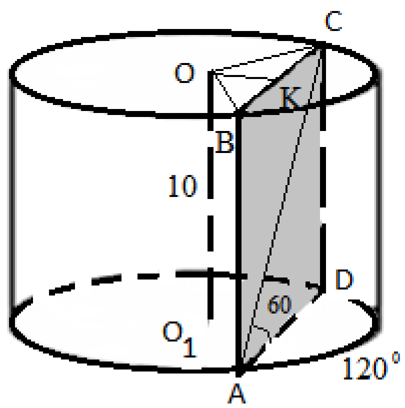
Значит **BC=24**

4) ABCD – прямоугольник, поэтому его площадь равна произведению его сторон:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 24 = 96$$

Ответ: 96.

<u>Задача №3.</u> Высота цилиндра равна 10. Через две его образующие проведено сечение, которое отсекает от окружности основания дугу в 120^0. Найти объем цилиндра, ели угол между диагональю сечения и плоскостью основания равен 60^0



Дано: $OO_1 = 10$; ABCD – сечение; ∠CAD=60^0;
∪AD=120^0
Найти: V цилиндра

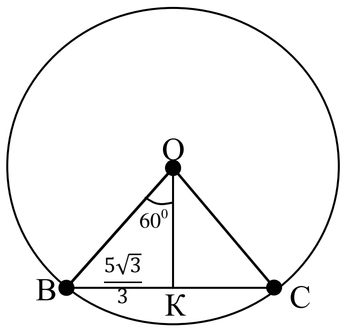
<u>Решение</u>
Объем цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 H$
H=10. Найдем R=OB

1) Сечение ABCD является прямоугольником, AB=CD=OO$_1$=10
2) Рассмотрим прямоугольный Δ ADC и найдем AD

$$ctg60^0 = \frac{AD}{CD}$$
$$AD = CD \cdot ctg60^0 = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$BC = AD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

3) По условию задачи сечение отсекает от окружности основания дугу в 120^0. А так как величина дуги равна величине соответствующего центрального угла, опирающегося на данную дугу, то можно сказать, что $\angle BOC=120^0$.



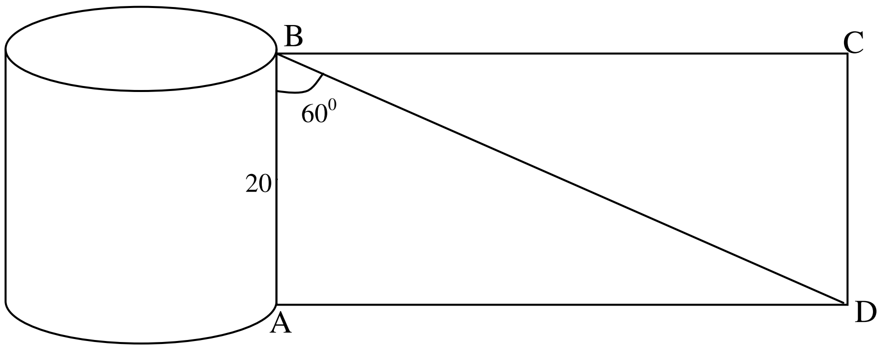
4) Так как OB=OC как радиусы, то ΔBOC - равнобедренный. Тогда OK является не только высотой, но и медианой и биссектрисой. Значит

$$BK = KC = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$
$$\angle BOK = \angle COK = 60^0$$
$$sin60^0 = \frac{BK}{BO}$$
$$BO = \frac{BK}{sin60^0} = \frac{5\sqrt{3}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}$$

5) $V = \pi R^2 H = \pi \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot 10 = \pi \cdot \frac{100}{9} \cdot 10 = \frac{1000}{9}\pi$

Ответ: $\frac{1000}{9}\pi$

<u>Задача №4.</u> Высота цилиндра равна 20. В разверстке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол в 60^0. Определить $S_{полн}$ и V.



Дано: $\angle ABD=60^0$
H=20
Найти: V, $S_{полн}$

<u>Решение</u>

1) Объем цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 H$

H=20, найдем R

Из теории знаем, что если развернуть боковую поверхность цилиндра, то сторона AD прямоугольника ABCD является <u>длиной окружности</u> основания цилиндра, т.е. $AD = 2\pi R$, значит

$$R = \frac{AD}{2\pi}$$

Найдем AD из прямоугольного ΔBAD

$$tg60^0 = \frac{AD}{AB}$$
$$AD = AB \cdot tg60^0 = 20\sqrt{3}$$

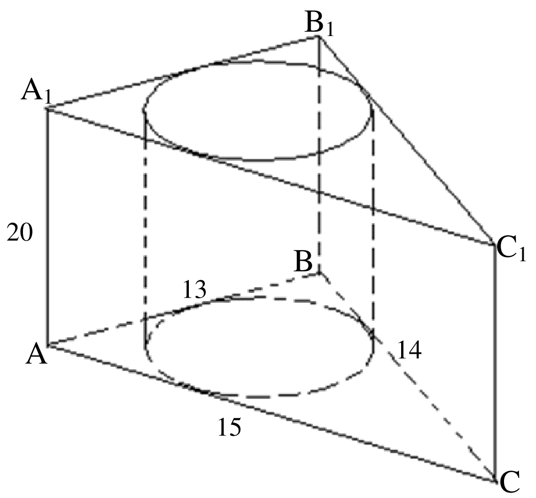
Тогда

$$R = \frac{AD}{2\pi} = \frac{20\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{10\sqrt{3}}{\pi}$$
$$V = \pi R^2 H = \pi \left(\frac{10\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = \pi \cdot \frac{100 \cdot 3}{\pi^2} \cdot 20 = \frac{6000}{\pi}$$

2) $S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \frac{10\sqrt{3}}{\pi} \cdot 20 + 2\pi \left(\frac{10\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 = 400\sqrt{3} + 2\pi \cdot \frac{100 \cdot 3}{\pi^2} = 400\sqrt{3} + \frac{600}{\pi}$

Ответ: $V = \frac{6000}{\pi}$; $S_{полн} = 400\sqrt{3} + \frac{600}{\pi}$

Задача №5. В прямой треугольной призме, стороны основания которой равны 13, 14 и 15, а высота равна 20, сделали цилиндрическое отверстие максимального размера. Вычислить: площадь поверхности и объем получившегося тела



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма;

AB=13; BC=14; AC=15; H=20

Найти: V; $S_{\text{полн}}$

<u>Решение</u>:

I. Так как в призме сделали цилиндрическое отверстие, то объем получившегося тела найдем как разность объемов призмы и цилиндра

$$V = V_{\text{призмы}} - V_{\text{цилиндра}}$$

1) $V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot \text{H}$

Площадь основания призмы – это площадь ΔABC. Используем формулу Герона

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} =$$
$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 21 \cdot 4 = 84$$

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = 84 \cdot 20 = 1680$

2) $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H$

H=20, а R – радиус цилиндра – это радиус окружности, вписанной в ΔABC. Значит его можно найти по формуле

$$R = r_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta}}{p} = \frac{84}{21} = 4$$

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = \pi \cdot 16 \cdot 20 = 320\pi$$

$$V = V_{\text{призмы}} - V_{\text{цилиндра}} = 1620 - 320\pi \approx 1620 - 1004{,}8 = 615{,}2$$

II. Площадь поверхности получившегося тела будет состоять из <u>суммы</u> следующих площадей:

$$\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок внешняя}} + S_{\text{бок внутренняя}} + 2S_{\text{осн}}}$$

$S_{\text{бок внешняя}}$ - это боковая поверхность призмы, значит $S_{\text{бок внешняя}} = P_{\text{осн}} \cdot \text{H} = 42 \cdot 20 = 840$

$S_{\text{бок внутренняя}}$ - это боковая поверхность цилиндра (отверстия), значит $S_{\text{бок внутренняя}} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 4 \cdot 20 = 160\pi \approx 502{,}4$

$S_{\text{осн}}$ - это площадь части треугольника, в котором вырезали круг, значит $S_{\text{осн}} = S_{\Delta} - S_{\text{круга}} = 84 - \pi \cdot 4^2 = 84 - 16\pi \approx 84 - 50{,}24 = 33{,}76$

Итак

$$S_{\text{полн}} = 840 + 502{,}4 + 2 \cdot 33{,}76 = 1409{,}92$$

Ответ: $V = 615{,}2$; $S_{\text{полн}} = 1409{,}92$