Инструкция к практическому занятию: «Решение иррациональных неравенств»

Преподаватель И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Повторить определение арифметического квадратного корня;
2. Закрепить решение линейных неравенств и квадратных неравенств, систем неравенств;
3. Отработать методы решения иррациональных неравенств.
4. Развить математическое мышление, наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) дать определение арифметического квадратного корня;
   б) какие утверждения следуют из определения арифметического квадратного корня?
   в) какой основной метод решения иррациональных неравенств?
   г) какое неравенство называется линейным неравенством? Как решаются линейные неравенства? Какими правилами надо руководствоваться при решении линейных неравенств?
   д) какие неравенства называются квадратными? Расскажите решение квадратного неравенства методом интервалов.
   е) Что значит решить систему неравенств?

2. Используя указания к практической работе, решить неравенство методом интервалов.

3. Оформить решение.

Указания к выполнению работы

! **Иррациональные неравенства** – это неравенства, в которых переменная находится под знаком корня.

Основным методом решения иррациональных неравенств является сведения исходного неравенства к равносильной системе или к совокупности систем рациональных неравенств.

Рассмотрим основные виды иррациональных неравенств:

	Вид неравенства	Решение
I	$\sqrt{f(x)} < a$	1) Если $a < 0$, то неравенство решений не имеет 2) Если $a \geq 0$, то необходимо составить и решить систему $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 < a^2 \end{cases}$
II	$\sqrt{f(x)} > a$	1) Если $a < 0$, то необходимо решить неравенство $f(x) \geq 0$. 2) Если $a \geq 0$, то решают неравенство $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 > a^2$
III	$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 < \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 \end{cases}$
IV	$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 < (g(x))^2 \end{cases}$
V	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$

где ***a*** – некоторое действительное число, ***f(x)*** и ***g(x)*** – выражения, зависящие от переменной *x*.

Запомни! ***Неравенство нельзя возводить в чётную степень, если хотя бы одна из частей отрицательна!***

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 5x} < 6$.

Решение.

Неравенство вида (II) из таблицы. Так как a=6>0, то составляем систему:

$$\sqrt{x^2 - 5x} < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 < 6^2 \end{cases}$$

1) Решим первое неравенство системы $x^2 - 5x \geq 0$

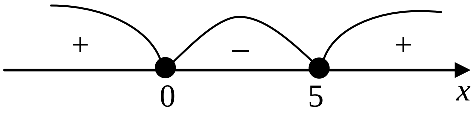
$$x \cdot (x-5) \geq 0$$

<u>Нули</u>: $x \cdot (x-5) = 0$

$x = 0$ или $x - 5 = 0$

$x = 5$

Нанесём нули на числовую прямую и определим знаки:



$$x \cdot (x-5) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$$

2) Решаем второе неравенство системы $\left(\sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 < 6^2$

$x^2 - 5x < 36$

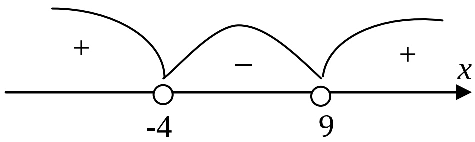
$x^2 - 5x - 36 < 0$

Получили квадратное неравенство, которое решим методом интервалов.
Найдем его нули: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169 = 13^2$

$$x_1 = \frac{5+13}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{5-13}{2} = -4$$

Разложим неравенство на линейные множители $(x-9)(x+4) < 0$
Нанесем нули на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:

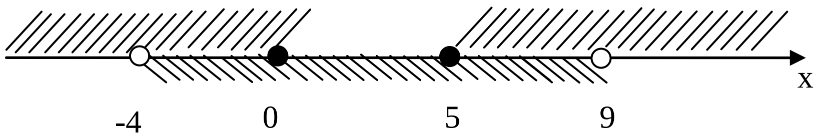


$$x \in (-4; 9)$$

3) Найдём пересечение решений первого и второго неравенств

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty) \\ x \in (-4; 9) \end{cases}$$

Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Ответ. $x \in (-4; 0] \cup [5; 9)$

№1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{5x - 2} < -20$; б) $\sqrt{11 + 6x - 5x^2} > -1$;

в) $\sqrt{x^2 + x - 2} < 2$.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 \geq 81 \\ (x+9)(20-x) \geq 0 \end{cases}$

<u>Решение</u>.

1) Решим первое неравенство системы: $x^2 \geq 81$

$$x^2 - 81 \geq 0$$

Разложим левую часть неравенства по формуле $\boldsymbol{a^2 - b^2} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

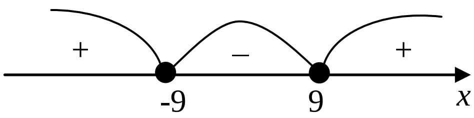
$(x-9)(x+9) \geq 0$

<u>Нули</u>: $(x-9)(x+9) = 0$

$x - 9 = 0$ или $x + 9 = 0$

$x = 9$ $\qquad$ $x = -9$

Нанесём нули на числовую прямую и определим знаки:



$$(x-9) \cdot (x+9) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$$

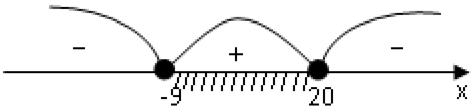
2) Решаем второе неравенство системы $(x+9)(20-x) \geq 0$.

<u>Нули</u>: $(x+9)(20-x) = 0$

$x + 9 = 0$ или $20 - x = 0$

$x = -9$ $\qquad$ $x = 20$

Нанесём нули на числовую прямую и определим знаки:

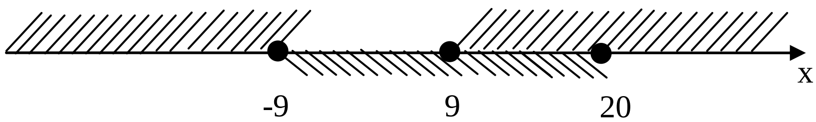


$$(x+9) \cdot (20-x) \geq 0$$

$$x \in [-9; 20]$$

3) Теперь определим общее решение системы $\begin{cases} x \in (-\infty; -9] \cup [9; +\infty) \\ x \in [-9; 20] \end{cases}$

Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Ответ. $x \in \big[9; 20\big] \cup \{-9\}$

№2. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 \geq 16 \\ (x+4)(15-x) \geq 0 \end{cases}$

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{3x+7} \leq 1 - x$

<u>Решение</u>.

Имеем иррациональное неравенство вида (IV) из таблицы. Для его решения необходимо составить систему неравенств:

$$\sqrt{3x+7} \le 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 & \textbf{(1)} \\ 3x+7 \ge 0 & \textbf{(2)} \\ \left(\sqrt{3x+7}\right)^2 \le (1-x)^2 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно:

1. $1-x \ge 0;\quad -x \ge -1;\quad x \le 1;\quad x \in (-\infty; 1]$

2. $3x+7 \ge 0;\quad 3x \ge -7;\quad x \ge -\frac{7}{3};\quad x \in \left[-\frac{7}{3}; +\infty\right)$

3. $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 \le (1-x)^2 \qquad 3x+7 \le 1-2x+x^2;$

$3x+7-1+2x-x^2 \le 0;$

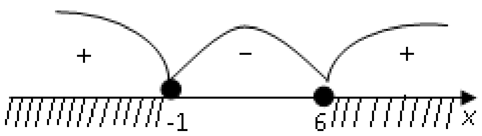
$-x^2+5x+6 \le 0$

$x^2-5x-6 \ge 0$

<u>Нули</u>: $x_1 = -1;\quad x_2 = 6$

Разложим неравенство на линейные множители $(x+1)(x-6) \ge 0$

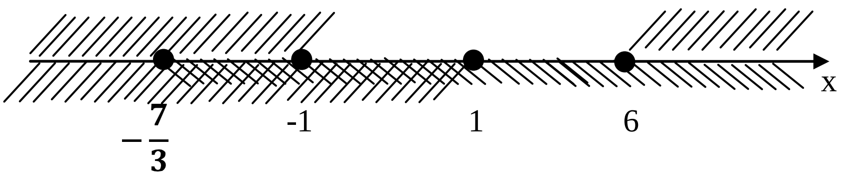
Нанесем точки на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$

Теперь определим общее решение системы: $\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ x \in \left[-\frac{7}{3}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty) \end{cases}$

Найдем решение данной системы. Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Ответ. $x \in \left(-\frac{7}{3}; -1\right)$

№3. Решите неравенства:

а) $\sqrt{16-x} < x+4$; б) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;

в) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x-1} > x-7$.

<u>**Решение.**</u>

Имеем иррациональное неравенство вида (V) из таблицы. Для его решения необходимо составить совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-7 < 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 \ge 0 \\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2 > (x-7)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

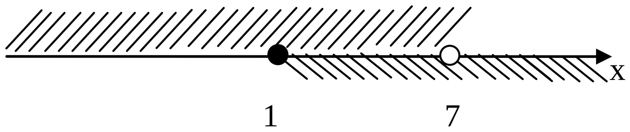
1) Решим первую систему неравенств: $\begin{cases} x-7<0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$

a. $x-7<0;$ $\quad x<7;$ $\quad x\in(-\infty;7)$

b. $x-1\geq 0;$ $\quad x\geq 1;$ $\quad x\in[1;+\infty)$

c. Теперь определим общее решение системы $\begin{cases} x\in(-\infty;7) \\ x\in[1;+\infty) \end{cases}$

Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Значит $x\in[1;7)$

2) Решим вторую систему неравенств: $\begin{cases} x-7\geq 0 \\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2>(x-7)^2 \end{cases}$

a. $x-7\geq 0;$ $\quad x\geq 7;$ $\quad x\in[7;+\infty)$

b. $\left(\sqrt{x-1}\right)^2>(x-7)^2;$

$x-1>x^2-14x+49$

$x-1-x^2+14x-49>0$

$-x^2+15x-50>0$

$x^2-15x+50<0$

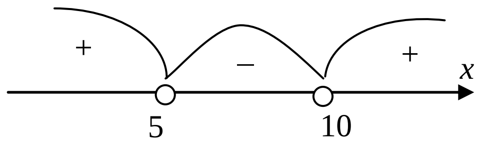
<u>Нули:</u> $x^2-15x+50=0$

$D=15^2-4\cdot1\cdot50=225-200=25=5^2$

$x_1=\frac{15+5}{2}=10$ $\qquad x_2=\frac{15-5}{2}=5$

Разложим неравенство на линейные множители $\quad (x-10)(x-5)<0$

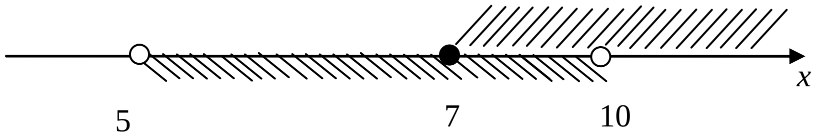
Нанесем нули на числовую прямую в порядке возрастания и определим знаки на каждом интервале:



$x\in(5;10)$

c. Теперь определим общее решение системы $\begin{cases} x\in[7;+\infty) \\ \mathrm{x}\in(5;10) \end{cases}$

Для этого нанесем решения неравенств на одну прямую:



Значит $x\in[7;10)$

Решением совокупности двух систем является объединение решений этих систем $x\in[1;7)\cup[7;10)$

Ответ. $x\in[1;10)$

№4. Решите неравенства:

а) $\sqrt{4x - x^2} \geq x - 4$; б) $4 - 5x < \sqrt{16 + 30x - 25x^2}$;

в) $\sqrt{\frac{3}{3x^2 - 2x - 1}} \geq \frac{1}{2 - x}$.

№5. Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 4x + 13} \leq -x^2 + 4x - 1$;

б) $\frac{3}{\sqrt{5 - x}} - \sqrt{5 - x} < 2$.

<u>Указание:</u> Решается либо методом замены переменной, либо возведением в квадрат. При этом вы должны получить одно из уравнений, приведённых в таблице и решить его соответствующим методом.