Учреждение образования «Молодечненский государственный политехнический колледж»

Инструкция к практическому занятию: «Прогрессия».

Преподаватель И. А. Кочеткова

Цель работы:

1. Отработать определения геометрической и арифметической прогрессии.
2. Отработать навыки вычислений значений любых членов прогрессий и их сумм.
3. Отработать навыки представления бесконечной периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби;
4. Развить математическое мышление, наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования и вычисления.

Оборудование: карты индивидуальных заданий, калькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   a) какая последовательность чисел называется арифметической прогрессией?
   b) что такое разность прогрессии d?
   c) Записать формулу, по которой вычисляется любой член арифметической прогрессии. Что нужно знать, чтобы использовать эту формулу?
   d) Записать формулу, по которой вычисляется сумма n первых членов арифметической прогрессии. Что нужно знать, чтобы использовать эту формулу?
   e) какая последовательность чисел называется геометрической прогрессией?
   f) что такое знаменатель прогрессии?
   g) Записать формулу, по которой вычисляется любой член геометрической прогрессии. Что нужно знать, чтобы использовать эту формулу?
   h) Записать формулу, по которой вычисляется сумма n первых членов геометрической прогрессии. Что нужно знать, чтобы использовать эту формулу?
   i) Что такое бесконечная убывающая геометрическая прогрессия? По какой формуле вычисляется её сумма?

2. Используя указания к практической работе, решить примеры.

3. Оформить решение.

Теория:

<u>Опр.</u> ***Арифметической прогрессией*** называется такая последовательность чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым разностью прогрессии.

Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d},$$

где **n** – любое натуральное число, а **d** – разность прогрессии.

<u>Теорема</u>. *Любой член арифметической прогрессии можно найти по формуле*

$$\boxed{a_n = a_1 + d \cdot (n-1)};$$

сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n}$$

Здесь a_n *– член прогрессии с номером n,* a_1 *– первый член и* **d** *– разность прогрессии.*

Свойства:

1) Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ и $a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$.

2) Если $n+m=k+l$, то $a_n+a_m= a_k+a_l$.

<u>Опр.</u> ***Геометрической прогрессией*** называется такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое число, отличное от нуля. Это число называется знаменателем прогрессии.

Если числа $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию, то

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q},$$

где **n** – любое натуральное число, а **q** – знаменатель прогрессии.

<u>Теорема</u>. *Любой член геометрической прогрессии можно вычислить по формуле*

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}};$$

сумма n первых членов геометрической прогрессии равна

$$\boxed{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \text{ при } q \neq 1}$$

Здесь b_n *– член прогрессии с номером n,* b_1 *– первый член и* **q** *– знаменатель прогрессии.*

Свойства:

1) Последовательность чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, начиная со второго, равен произведению предшествующего и последующего членов, т. е. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ и $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$.

2) Если $k+m=p+d$, то $b_k \cdot b_m = b_p \cdot b_d$

<u>Опр</u>. Геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***, если её знаменатель q по абсолютной величине меньше единицы. ***Суммой*** бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому сумма n первых членов неограниченно приближается с ростом n. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1-q}$ $(|q| < 1,\ b_1 > 0)$

Указания к выполнению практической работы

Задание №1. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, в которой $b_1=36$, $q=\frac{1}{6}$. Найти b_4.

Решение.

Используем формулу: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$b_4 = 36 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 36 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{6}$$

Ответ. $b_4 = \frac{1}{6}$

Задание №2. В геометрической прогрессии известно $b_2=8$ и $b_5=27$. Найти: 1) b_6; 2) S_5

Решение.

1) Найдём b_6. Для этого

1.1. Используем определение прогрессии и составим формулу, которая связывает известные по условию члены прогрессии $b_5 = b_2 \cdot q^3$.

Тогда можно найти неизвестный множитель q^3:

$$q^3 = \frac{b_5}{b_2};\ q^3 = \frac{27}{8};\ \ \boldsymbol{q = \frac{3}{2}}$$

1.2. Используем определение прогрессии и найдём b_6

$$b_6 = b_5 \cdot q$$

$$b_6 = 8 \cdot \frac{3}{2} = 4 \cdot 3 = 12$$

2) Используем формулу: $\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$

1.1. Найдем для этого b_1

b_1 и b_2 связаны по определению прогрессии формулой: $b_2 = b_1 \cdot q$

Значит $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{\frac{3}{2}} = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

1.2.Найдем сумму первых пяти членов прогрессии $S_5 = \frac{\frac{16}{3}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right)}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{243}{32}-1\right)}{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{243}{32}-\frac{32}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{16}{3}\cdot\frac{211}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{3}\cdot \frac{211}{32}\cdot\frac{2}{1} = \frac{211}{3}$

Ответ. 1) $b_6 = 12$; 2) $S_5 = \frac{211}{3}$

Задание №3. Сумма первых 80 членов арифметической прогрессии равна 80, а сумма первых 160 её членов равна 320. Чему равна сумма первых 40 членов этой прогрессии?

Решение.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n$

$$S_{80} = \frac{2a_1 + d\cdot(80-1)}{2}\cdot 80$$

$$S_{160} = \frac{2a_1 + d\cdot(160-1)}{2}\cdot 160$$

Видно, что в сумме первых 80 членов арифметической прогрессии и в сумме первых 160 членов арифметической прогрессии неизвестны $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{d}$. Чтобы их найти составим систему и решим её:

$$\begin{cases} \frac{2a_1+79d}{2}\cdot 80 = 80 \\ \frac{2a_1+159d}{2}\cdot 160 = 320 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2a_1+79d)\cdot 40 = 80 \\ (2a_1+159d)\cdot 80 = 320 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1+79d = 2 \\ 2a_1+159d = 4 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы вычтем первое уравнение системы и получит уравнение:

$$80d = 2;\quad d = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$$

Подставим найденное значение в 1-ое уравнение системы $2a_1 + 79\cdot\frac{1}{40} = 2$

$2a_1 + \frac{79}{40} = 2$ $\quad 2a_1 = \frac{80}{40} - \frac{79}{40}$ $\quad a_1 = \frac{1}{80}$

$2a_1 = 2 - \frac{79}{40}$ $\quad 2a_1 = \frac{1}{40}$

Теперь найдем чему равна сумма первых 40 членов этой прогрессии. Для этого опять воспользуемся формулой $\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n}$

$$S_{40} = \frac{2\cdot\frac{1}{80} + \frac{1}{40}\cdot(40-1)}{2}\cdot 40 = \frac{\frac{1}{40} + \frac{39}{40}}{2}\cdot 40 = \frac{40}{40}\cdot 20 = 1\cdot 20 = 20$$

Ответ. $S_{40} = 20$

Задание №4. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь 2,6(31) в виде обыкновенной

Решение.

Каждую бесконечную периодическую десятичную дробь можно представить как некоторое рациональное число (обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$). Для этого бесконечную периодическую десятичную дробь нужно представить как сумму конечной десятичной дроби и сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (или как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$2{,}6(31) = 2{,}6313131\ldots = 2{,}6 + 0{,}031 + 0{,}00031 + 0{,}0000031 + \cdots$ (*)

Замечаем, что в сумме $0{,}031 + 0{,}00031 + 0{,}0000031 + \cdots$все слагаемые можно получить из первого слагаемого 0,031:

$$0{,}00031 = 0{,}031 * 0{,}01$$
$$0{,}0000031 = 0{,}031 * 0{,}0001 = 0{,}031 * 0{,}01^2$$

$$0{,}031 + 0{,}00031 + 0{,}0000031 + \cdots = 0{,}031 + 0{,}031 * 0{,}01 + 0{,}031 * 0{,}01^2 \ldots$$

А это сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где первый член $b_1 = 0{,}031$ и знаменатель $q = 0{,}01$. Значит можно использовать формулу $\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$

$$S = \frac{0{,}031}{1-0{,}01} = \frac{0{,}031}{0{,}99} = \frac{31}{990}$$

Вернемся к **(*)**:

$$2{,}6(31) = 2{,}6313131\ldots = 2{,}6 + 0{,}031 + 0{,}00031 + 0{,}0000031 + \cdots = 2{,}6 + \frac{31}{990} = 2 + \frac{6}{10} + \frac{31}{990}$$
$$= 2 + \frac{3}{5} + \frac{31}{990} = 2 + \frac{3\cdot 198}{5\cdot 198} + \frac{31}{990} = 22 + \frac{594}{990} + \frac{31}{990} = 2 + \frac{625}{990} = 2 + \frac{125}{198} = 2\frac{125}{198}$$

Ответ. $2\frac{125}{198}$

Задание №5. В геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ сумма первых трех членов равна 7, а их произведение равно 8. Найти первый член прогрессии.

Решение.

Составим систему: $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 7 \\ b_1 * b_2 * b_3 = 8 \end{cases}$

Воспользуемся формулой $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ и заменим в системе b_2 и b_3:

$$\begin{cases} b_1 + b_1\cdot q + b_1\cdot q^2 = 7 \\ b_1 * b_1\cdot q * b_1\cdot q^2 = 8 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы перемножим одинаковые множители и получим ${b_1}^3 \cdot q^3 = 8$:

$$\begin{cases} b_1 + b_1\cdot q + b_1\cdot q^2 = 7 \\ (b_1\cdot q)^3 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 + b_1\cdot q + b_1\cdot q^2 = 7 \\ b_1\cdot q = 2 \end{cases}$$

Подставим в 1-ое уравнение системы вместо $b_1 \cdot q$ число 2 и получим систему:

$$\begin{cases} b_1 + 2 + 2q = 7 \\ b_1\cdot q = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 5 - 2q \\ (5-2q)\cdot q = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 5 - 2q \\ 5q - 2q^2 = 2 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы получили квадратное уравнение $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Решаем его и находим $q = 0{,}5$

Тогда $b_1 = 5 - 2q = 5 - 2\cdot 0{,}5 = 4$ **Ответ.** 4