Молодеченский государственный политехнический техникум

Инструкция к практическому занятию: Показательные уравнения.

Разработчик: И. А. Кочеткова

Цель работы:

1) Отработать некоторые приёмы решения показательных уравнений.

2) Научиться приводить показательные уравнения к известным алгебраическим уравнениям, используя свойства степеней, свойства показательной функции и алгебраические преобразования.

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить указания к выполнению практической работы.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить условия заданий. Определить способ решения.
4. Решить неравенства.
5. Оформить отчёт.
6. Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

Показательным уравнением называется уравнение, содержащее переменную в показателях степеней при некоторых постоянных основаниях.

Например: 1) $5^x = 125$; 2) $4 \cdot 4^x - 6^x - 9^{x-1} = 0$

При решении показательных уравнений полезно помнить о некоторых свойствах показательной функции:

1) Множеством значений показательной функции является множество всех положительных действительных чисел.

Пример: Уравнение $5^x = -25$ решений не имеет, т. к. $5^x > 0$ при любом x.

2) Если равны две степени с равными основаниями а, то равны и их показатели, т. е. если $a^s = a^t \Leftrightarrow s = t$.

Пример: В уравнении $5^x = 5^2$, переменная x=2.

Указания к выполнению практической работы

При выполнении работы, используйте рассмотренные ниже способы решения показательных уравнений.

1 способ. Способ приведения обеих частей уравн-я к одному основанию.

1.1. Привести обе части уравнения к одному основанию: $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ **(*)**, тогда **f(x)=g(x)**

При решении уравнений можно пользоваться формулами:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	5) $a^0 = 1$	7) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	6) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	8) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Пример 1. $6^{1-x} = \frac{1}{36^x}$

Решение. Приведём уравнение к виду (*). Для этого у степеней должно быть одно основание 6.

$6^{1-x} = \frac{1}{6^{2x}}$, применим формулу 4 и получим:

$6^{1-x} = 6^{-2x}$

Из равенства двух степеней с одним основанием 6 следует равенство их показателей

1-*x*= -2*x*, *x*= -1.

Ответ: x= -1.

Пример 2. $25^{3x-4} = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+0,5}$

Решение. Приведём степени к одному основанию 5, для этого применим формулы 6 и 4:

$(5^2)^{3x-4} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot (5^{-1})^{2x+0,5}$, затем применим формулы 3 и 1, получим:

$5^{6x-4} = 5^{0,5} \cdot 5^{-2x-0,5}$;

$5^{6x-4} = 5^{0,5-2x-0,5}$;

$5^{6x-4} = 5^{-2x}$

6*x*-8=-2*x*; 8*x*=8; *x*=1. **Ответ:** *x*=1.

Пример 3. $2^x \cdot 5^{x+1} = 0,05$

Решение. Применим формулу 1 и десятичную дробь представим в виде обыкновенной дроби: $2^x \cdot 5^x \cdot 5^1 = \frac{5}{100}$.

Применим формулу 7 и разделим обе части уравнения на 5:

$10^x \cdot 5 = \frac{5}{100}$; $10^x = \frac{1}{100}$; $10^x = 10^{-2}$; *x*=-2.

Ответ: *x*= -2.

1.2. Привести уравнение к виду $\boxed{a^{f(x)} = b^{f(x)}}$. Затем, чтобы уравнять основания, необходимо разделить обе части уравнения на $b^{f(x)}$. Получим уравнение $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1$. В правой части уравнения единицу необходимо заменить на $\left(\frac{a}{b}\right)^0$.

Пример. $2^{x-2} = 5^{2-x}$

Решение. Применим формулу 4, чтобы у данных степеней был одинаковый показатель:

$2^{x-2} = 5^{-(x-2)}$; $\quad 2^{x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$, умножим уравнение на 5^{x-2} и получим:

$2^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$;

$10^{x-2} = 1$; по формуле 5 $10^{x-2} = 10^0$;

x-2=0; x= 2.

Ответ: *x*=2.

1.3. Способ вынесения общего множителя за скобки.

Этот способ применяется, если уравнение имеет вид $\alpha_1 \cdot a^{f(x)} + \alpha_2 \cdot a^{f(x)} + \ldots + \alpha_n \cdot a^{f(x)} = \beta$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - любые действительные числа. Тогда общий множитель можно вынести за скобки и найти его численное значение.

Пример. $4^{x+2} - 3 \cdot 4^{x-1} = 122$

Решение. Применим формулу 1 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, тогда уравнение примет вид:

$4^x \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^x \cdot 4^{-1} = 122$;

$4^x \cdot 16 - \frac{3}{4} \cdot 4^x = 122$

Вынесем неизвестную степень 4^x за скобки и разделим уравнение на число, получившееся в скобках:

$4^x \cdot \left(16 - \frac{3}{4}\right) = 122$;

$4^x \cdot \frac{61}{4} = 122$; $\quad 4^x = 122 \cdot \frac{4}{61}$;

$4^x = 8$; $\quad 2^{2x} = 2^3$;

$2x = 3$; $\quad x = \frac{3}{2}$

Ответ: *x*=1,5.

<u>2 способ</u>. Способ введения новой переменной.

2.1. Уравнение вида $\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma$ - числа) заменой $a^{f(x)} = t$, t>0 сводится к квадратному уравнению $\alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \gamma = 0$.

Пример. $9^x - 3^x = 72$

Решение. $3^{2x} - 3^x - 72 = 0$; $\quad (3^x)^2 - 3^x - 72 = 0$.

Заменим $3^x = t$, $\quad t > 0$, тогда уравнение примет вид:

$t^2 - t - 72 = 0$.

Решаем квадратное уравнение и получаем: t_1= -8, t_2=9.

Т. к. t>0, то t_1= -8 не подходит.

Значит $3^x = 9$, *x*=2.

Ответ: *x*=2.

2.2. Уравнение вида $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot a^{-f(x)} + \gamma = 0$ или $\alpha \cdot a^{f(x)} + \dfrac{\beta}{a^{f(x)}} + \gamma = 0$ заменой $a^{f(x)} = t$, t>0 сводится к квадратному уравнению $\alpha t + \dfrac{\beta}{t} + \gamma = 0, \quad \alpha \cdot t^2 + \gamma \cdot t + \beta = 0$.

Пример. $2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2^x + \dfrac{2}{2^x} - 3 = 0$ и заменим $2^x = t, \quad t > 0$, тогда уравнение примет вид:

$t + \dfrac{2}{t} - 3 = 0$. Умножим на t и получим квадратное уравнение:

$t^2 - 3t + 2 = 0;$

$t_1 = 2; \quad t_2 = 1$

Значит $2^x = 2$ или $2^x = 1$

x=1 или *x*=0.

Ответ: 0; 1.

2.3. Уравнение вида $\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + \gamma \cdot b^{2f(x)} = 0$ является <u>однородным</u> уравнением второй степени относительно $a^{f(x)}$ и $b^{f(x)}$. Это уравнение также сводится к квадратному. Для этого его делят на $b^{2f(x)}$ или на $a^{2f(x)}$ и получают уравнение: $\alpha \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \beta \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} + \gamma = 0$, затем заменой $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = t$ (t>0) сводится к квадратному уравнению $\alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \gamma = 0$.

Пример. $8 \cdot 9^x - 19 \cdot 6^x - 27 \cdot 4^x = 0$

Решение. Приведём уравнение к нужному виду:

$8 \cdot 3^{2x} - 19 \cdot 2^x \cdot 3^x - 27 \cdot 2^{2x} = 0$. Разделим его на 2^{2x}, получим:

$8 \cdot \dfrac{3^{2x}}{2^{2x}} - 19 \cdot \dfrac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 2^x} - 27 \cdot \dfrac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0$; Сократим и применим формулу 8

$8 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} - 19 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} - 27 = 0$ Заменим $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} = t, \quad t > 0$

$8t^2 - 19t - 27 = 0;$

$t_1 = \dfrac{27}{8}; \quad t_2 = -1$ (неподходит)

Значит $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} = \dfrac{27}{8}$ или $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}$ Итак, x=3.

Ответ:3.

Контрольные вопросы:

1) Какое уравнение называется показательным?

2) О каких свойствах показательной функции полезно помнить при решении показательных уравнений?
3) Приёмы решения показательных уравнений?
4) Какими способами можно уравнять основания?
5) Какие уравнения сводятся к квадратному? Какое уравнение называется однородным и как оно решается?